



Р. А. САПОЖНИКОВ

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
ФОТОМЕТРИЯ**

Р. А. САПОЖНИКОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФОТОМЕТРИЯ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ



«ЭНЕРГИЯ»

Ленинградское отделение

1967

УДК 535.24.001

6П2.19
С19

В книге изложены основные методы расчета распределения лучистой энергии, имеющие практическое значение для расчета освещения и лучистого теплообмена при распространении радиации в среде, влиянием которой можно пренебрегать. Рассмотрены истоки, развитие, современное содержание и некоторые применения этих методов. Показана связь фотометрии с дозиметрией ионизирующих излучений.

Книга предназначена для инженеров и физиков, интересующихся вопросами фотометрии, оптики, освещения и теплопередачи. Она может быть полезна также студентам, изучающим эти области науки.

3-3-11

169-67

САПОЖНИКОВ РОСТИСЛАВ АЛЕКСЕЕВИЧ

ТЕБРЕТИЧЕСКАЯ ФОТОМЕТРИЯ

Редактор **Я. В. Зарицкий** Художник **Б. П. Кузнецов** Техн. ред. **Е. М. Соболева**
Корректор **Э. А. Любченко, Л. Г. Андрющенко**

Сдано в производство 25/IV 1967 г. Подписано к печати 9/VIII 1967 г. М-53526.
Печ. л. прив. 14,07. Уч.-изд. л. 13,1. Бум. л. 4,18. Бумага типографская № 2
Формат 84×108¹/₃₂. Тираж 4000 экз. Цена 86 коп. Заказ 1099.

Ленинградская типография № 4 Главполиграфпрома Комитета по печати при
Совете Министров СССР, Социалистическая, 14.



ПРЕДИСЛОВИЕ

Изданная в 1960 г. и благоприятно встреченная читателями монография «Теоретическая фотометрия. Основы расчета освещения» [Л. 344] уже стала библиографической редкостью. В то же время расширился круг специалистов, интересующихся рассмотренными в ней проблемами. Фотометрические закономерности получают новые применения в областях, непосредственно не связанных с техникой освещения. Все это побудило автора предпринять новое издание своего труда, предлагаемого вниманию читателей в переработанном и дополненном виде.

При переработке книги ее содержание расширено в сторону проблем теоретической фотометрии и несколько сокращено в части прикладных задач техники освещения. Она дополнена изложением новых исследований, опубликованных в последние годы, а также публикуемых впервые. Сюда относится развитие теории светового поля, в особенности для источников света, не подчиняющихся закону Ламберта, и ряд других вопросов. В книге исследованы некоторые случаи преобразования светового поля посредством конформного отображения, дано новое доказательство инварианта Стокса и новые решения задач, относящихся к явлениям отражения и пропускания света плоскопараллельным слоем. Книга дополнена подробным изложением современных взглядов на спектральные характеристики радиации. В ней рассмотрена зависимость освещенности от расстояния для астигматического пучка, которой в литературе обычно не уделяют внимания, а также зависимость яркости пучка от показателя преломления среды. Кроме того, в книге выяснена связь фотометрии с дозиметрией ионизирующих излучений и показана возможность

применения теоретической фотометрии в дозиметрических расчетах.

Содержание современной теоретической фотометрии составляют ее методы и результаты решения разнообразных задач. Ниже изложены главнейшие из этих методов. Решения немногих задач приведены лишь в качестве примеров.

При этом во всех случаях, кроме особо оговоренных, рассматриваются только источники радиации и освещаемые ими тела, расположенные в среде, влиянием которой можно пренебречь. Обширный круг вопросов, относящихся к фотометрии преломляющих, рассеивающих и излучающих сред, в книге не затронут.

Многие фотометрические задачи целесообразно решать с помощью электронных вычислительных машин — как аналоговых, так и цифровых. Однако методика применения вычислительных машин, имеющая свою литературу [Л. 337, 353], здесь не рассматривается.

Заметим, наконец, что фотометрия, как и многие другие области науки, получает развитие в информационном аспекте [Л. 367, 379]. Относящиеся сюда проблемы выходят, однако, из рамок этой книги, охватывающих лишь задачи энергетического плана.

Новое издание монографии дополнено справочными материалами. В нем помещена подробная таблица численных значений функции Ламберта — Ямаути. Вместе с тем для уменьшения объема книги сделаны некоторые сокращения. Библиография, дополненная новыми источниками, несколько сокращена в части источников, указанных в первом издании.

Автор с признательностью воспользовался в своей работе замечаниями, советами и помощью проф. Л. Д. Белькинда, проф. М. М. Гуревича, В. К. Кагана, проф. В. В. Мешкова, проф. В. В. Новикова, Е. Д. Соколоменцева и проф. П. М. Тиходеева.

Все замечания и пожелания читателей будут приняты с благодарностью. Письма просьба направлять по адресу: Ленинград, Д-41, Марсово поле, д. 1, Ленинградское отделение издательства «Энергия».

Р. Сапожников

ВВЕДЕНИЕ

ВОЗНИКНОВЕНИЕ И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФОТОМЕТРИИ

Фотометрия — учение об измерении света, рассматривающее устройство и применение служащих для этого приборов [Л. 223, 401]. В нее входит теория световых измерений, содержащая основания расчетов, необходимых для конструирования фотометрических приборов и их правильного употребления. К фотометрическим расчетам относится, например, расчет условий исчезновения контраста между наблюдаемыми объектами. С другой стороны, то, что измеряют фотометрическими приборами, можно вычислять, если известны свойства источников света, их расположение относительно освещаемых тел, а также свойства среды, через которую проходит свет. Подобные расчеты составляют задачу теоретической фотометрии, так же относящейся к учению о световых измерениях, как теоретическая механика относится к прикладной. Определяемая так [Л. 217, 309] теоретическая фотометрия составляет предмет дальнейшего изложения.

Некоторые приемы количественной оценки света были известны еще в древности, по крайней мере в Египте и в Греции. В этом убеждает изучение архитектурных сооружений того времени, в которых обнаруживается правильный учет условий естественного освещения. Древнегреческие ученые, занимаясь астрономией, производили также сравнение блеска звезд. Однако в течение ряда столетий относящиеся к подобным задачам теоретические положения не разрабатывались. Так, Леон-Баттиста Альберти (1404—1472), художник и ученый, уделявший большое внимание освещению, ограничивался наблюдениями, которые изложены в различных редакциях его трактата о живописи, написанного в 1446 г. [Л. 1, 18].

Леонардо да Винчи (1452—1519), описывавший фотометрические опыты [Л. 261], а позже Галилео Галилей (1564—1642) также располагали в этой области лишь сведениями эмпирического характера [Л. 5, 6]. Но в XVI в. разносторонний ученый, профессор математики в Мессине, Франческо Мавролико (1494—1575) уже сформулировал ряд теорем [Л. 2], «которые можно рассматривать как первый опыт теоретической фотометрии» (С. И. Вавилов [Л. 261]), ценный вклад в которую сделал в начале XVII в. Иоганн Кеплер (1571—1630) [Л. 3]. Тогда же к фотометрированию обращался бельгийский ученый Франсуа д'Эгильон (1566—1617) [Л. 4].

Наконец, в 1700 г. Франсуа Мари издал в Париже первую книгу об измерении света [Л. 7], ставшую началом «новой главы оптики — фотометрии» (С. И. Вавилов [Л. 202]). Значительную часть этой «главы» написал затем Пьер Бугер (1698—1758). В трудах Бугера [Л. 8, 11, 108] получила развитие как практическая, так и теоретическая фотометрия.¹ Его справедливо называют отцом фотометрии.

Одновременно с Бугером проблемы теоретической фотометрии разрабатывал польский физик Ян Стефан Курдвановский (1680—1780) [Л. 9]. Затем Иоганн Генрих Ламберт, автор многочисленных работ в разнообразных областях науки (1728—1777), написал замечательную книгу [Л. 12], в которой развил теоретическую фотометрию для целей астрономии, но значительно шире, чем требовали эти цели. В другом труде он, опираясь на работы Леонардо да Винчи, рассматривал значение фотометрии для живописи [Л. 13]. Он занимался также и практическими задачами освещения [Л. 14].

В числе ученых, решавших в то время фотометрические задачи астрономии, был также Леонард Эйлер (1707—1783) [Л. 10]. Работы Бугера, Эйлера и Ламберта образовали теоретическую фотометрию как самостоятельную область прикладной математики, в качестве которой она излагалась наряду с теоретической механикой уже в XVIII в. [Л. 17]. Впоследствии появились

¹ Фотометрическую теорию Бугера излагали В. И. Карстен [Л. 17] и А. К. Кононович [Л. 40].

сочинения под этим названием [Л. 34, 39, 53, 142, 232]. Можно указать также некоторые обзоры теоретической фотометрии [Л. 26, 27].

Другая линия развития теоретической фотометрии лежит в учении о перспективе и тенях, разработка которого была начата древними греками, продолжалась Леонардо да Винчи [Л. 6] и была связана с оптикой, хотя относилась более к искусству. В XVIII в. исследование градации теней привело к попыткам расчета освещения независимо от астрономических работ. Это исследование требовалось для наиболее правильного и наглядного изображения предметов в архитектурном и техническом черчении. Тогда же началось развитие теоретической фотометрии и в задачах расчета искусственного освещения [Л. 15]. Затем оно продолжалось в астрономии [Л. 33], начертательной геометрии, архитектуре, теплотехнике и в особенности в светотехнике. Изучение теней при освещении привело к своеобразному соединению направлений начертательной геометрии и светотехники [Л. 182].

Измерения, аналогичные световым, производимые в разных областях спектра электромагнитных волн, существенно отличаются от фотометрических как способом, так и применяемой аппаратурой, хотя и относятся к фотометрии в широком смысле, как к науке, изучающей измерение видимых и невидимых излучений [Л. 120]. Однако методы расчета, рассматриваемые в теоретической фотометрии, пригодны для решения многих задач в обширной области спектра от гамма-лучей до сантиметровых радиоволн. Поэтому теоретическая фотометрия имеет более широкое значение, чем световые измерения. Ее методы дают основы расчета распределения энергии радиации ряда областей спектра — лучистой энергии.

Слово радиация будем применять как название носителя лучистой энергии. Часто употребляемый синоним этого слова — излучение — имеет и другой смысл, как наименование процесса испускания [Л. 107] лучистой энергии источником. Поэтому целесообразнее излучением называть испускание, т. е. действие источника лучистой энергии, вследствие которого от источника в окружающее пространство распространяется несущая энергию радиация.

Распределение лучистой энергии зависит как от свойств среды, в которой она распространяется, так и от свойств радиации. В теоретической фотометрии все обусловленные этим явления рассматривают феноменологически, не вдаваясь в их причины [Л. 269, 270]. Кроме того, все явления рассматриваются макроскопически во времени и в пространстве [Л. 149]. Распределение лучистой энергии по поверхности считают непрерывным, отрешаясь в этом отношении от корпускулярной природы радиации.

Все эти допущения означают, что дифференциалы времени, поверхности и объема подразумеваются достаточно большими, чтобы можно было говорить о постоянных для них средних значениях величин, характеризующих структуру радиации.

Перечисленные условия соответствуют основаниям геометрической оптики, частью которой иногда считают теоретическую фотометрию [Л. 262].

Задачи теоретической фотометрии со временем усложнялись, а число их росло. Так, Ламберт рассматривал действие светящегося круга [Л. 12], а позднейшие исследователи перешли к эллипсу [Л. 26], тору [Л. 110] и к еще более сложным фигурам [Л. 109]. Классические решения таких задач, которые дали основоположники теоретической фотометрии, были получены суммированием действия точечных источников. Усовершенствование этого метода достигалось применением различных математических приемов, облегчавших решение все более сложных задач.

Впоследствии появились другие методы, возникшие из теории поля и из термодинамики, принципиально отличающиеся от классического и открывающие новые возможности решения фотометрических проблем. Развитию этих новых направлений способствовали своими трудами многие ученые и в особенности профессор Андрей Александрович Гёршун (1903—1952) [Л. 292, 320, 356], а также ученые-теплотехники [Л. 282].

ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

§ 1. Геометрия лучей

Источник лучистой энергии всегда занимает некоторый объем. Через поверхность, ограничивающую объем источника, должна проходить лучистая энергия, посылаемая им в окружающее пространство. При феноменологическом рассмотрении удобно принимать, что эта энергия возникает на поверхности источника, называемой в таком случае излучающей поверхностью.

Если размеры излучающей поверхности малы по сравнению с расстоянием, на которое она действует, то при изучении получаемого в пространстве распределения энергии можно допустить дальнейшее упрощение, заменив поверхность излучающей точкой, называемой точечным источником, как это делал еще Альберти [Л. 18]. При этом важно соотношение расстояний и размеров, по абсолютному же значению размеры источника, принимаемого за точечный, могут быть очень велики.

На меньших расстояниях за точечные источники могут быть приняты части излучающей поверхности, размеры которых соответственно меньше этих расстояний. Разбивая всю излучающую поверхность на элементы, принимаемые за точечные источники, можно, следовательно, заменить ее совокупностью таких источников. В действительности, однако, точечный источник не может существовать, т. е. не может давать никакой энергии: если бы такой источник существовал, то объемная плотность энергии (количество энергии в единице объема) была бы в нем бесконечно большой, как и температура, а такое состояние физически невозможно.

Поэтому, пользуясь понятием о точечном источнике, всегда следует подразумевать условно им заменяемый реальный источник в виде того или иного размера элемента поверхности, через который выходит лучистая энергия, возникающая в находящемся за этим элементом объеме. Однако в теоретической фотометрии это понятие так же необходимо и имеет такое же право на существование, как понятие о материальной точке в механике [Л. 232].

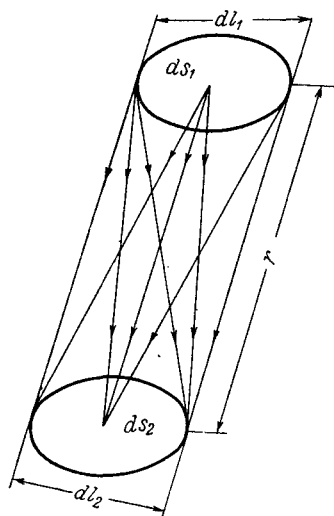


Рис. 1.

Пусть ds_1 (рис. 1) — элемент излучающей поверхности, а ds_2 — элемент освещаемой поверхности, на который падает лучистая энергия от ds_1 . Предположим, как и везде в дальнейшем (за исключением особо оговоренных случаев), что среда между этими элементами однородна, вследствие чего лучи прямолинейны. Из каждой точки элемента ds_1 можно провести луч в каждую точку элемента ds_2 . На рис. 1 таким способом проведены лучи из центральной и одной из периферических точек

первого элемента. Как видно, эти лучи образуют расходящиеся пучки, исходящие из точек излучающего элемента, т. е. гомоцентрические, и опирающиеся на освещаемый элемент. Это показал еще Мавролико [Л. 2]. Число таких пучков, соединяющих ds_1 с ds_2 , определяется, очевидно, двумерным бесконечным числом (∞^2) точек элемента ds_1 , т. е. составляет двойное бесконечное многообразие. Совокупность такого числа расходящихся пучков называют физическим пучком или трубкой лучей. Он переносит энергию от излучающего к освещаемому элементу, в то время как отдельный расходящийся пучок реально никакой энергии переносить не может, поскольку он исходит из точки.

Заметим теперь, что можно еще провести лучи, идущие в каждую точку элемента ds_2 из всех точек элемента ds_1 . На рис. 1 такое построение сделано для центральной и одной из периферических точек элемента ds_2 . В результате получаются гомоцентрические сходящиеся пучки лучей, число которых равно двумерному бесконечному числу точек элемента ds_2 , т. е. также составляет двойное бесконечное многообразие. Физический пучок можно поэтому рассматривать еще как совокупность такого числа сходящихся пучков, причем он, очевидно, будет состоять из тех же самых лучей, только иначе сгруппированных.

Отдельный сходящийся пучок реально не может переносить энергии, так же как и расходящийся. Если бы мы допустили противное, то пришли бы к выводу, что в точке схождения объемная плотность энергии бесконечно велика и бесконечно велики значения электрической и магнитной сил, чего в действительности быть не может.

Каждый гомоцентрический пучок (сходящийся или расходящийся) состоит в свою очередь из двойного бесконечного многообразия лучей, соответствующего числу точек (∞^2) элемента поверхности, на который он опирается. Следуя Планку, можно поэтому сказать, что физический пучок состоит из четверного бесконечного многообразия (∞^4) лучей или из двойного бесконечного многообразия сходящихся или расходящихся пучков [Л. 149].

Гомоцентрический пучок, опирающийся на элемент ds , занимает телесный угол

$$d\omega = \frac{\cos \vartheta}{r^2} ds, \quad (1)$$

где r — расстояние от ds до вершины пучка, а ϑ — острый угол между линией, по которой измеряется это расстояние, т. е. осью или направлением раскрытия угла $d\omega$, и нормалью n к ds (рис. 2).

Телесный угол $d\omega$ определяет вероятность того, что луч, выходящий из вершины пучка, попадает на ds

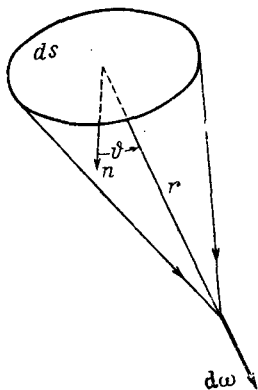


Рис. 2.

[Л. 248], т. е. вероятность облучения элемента ds точечным источником, находящимся в вершине пучка (эта вероятность равна отношению $d\omega$ к наибольшему телесному углу, который может занимать пучок, расходящийся из данной точки). Его можно рассматривать как меру множества лучей элементарного пучка. Тогда телесный угол ω , занимаемый широким сходящимся или расходящимся пучком, будет мерой множества лучей этого пучка [Л. 248].

Следуя Гершуну [Л. 217], будем пользоваться вектором $d\omega$ элементарного телесного угла $d\omega$, занимаемого сходящимся пучком лучей, равным этому углу по величине и направленным по его

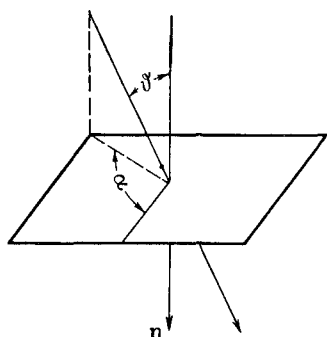


Рис. 3.

оси в ту же сторону, что и сходящийся пучок (рис. 2).

Проведя через вершину рассматриваемого пучка плоскость, перпендикулярную нормали n , и отсчитывая в этой плоскости азимутальный угол α (рис. 3), выразим элементарный телесный угол через угловые координаты α , ϑ известной формулой

$$d\omega = \sin \vartheta d\alpha d\vartheta. \quad (2)$$

Здесь предполагается, что лучи, заполняющие телесный угол $d\omega$, направлены под углами, изменяющимися от ϑ до $\vartheta + d\vartheta$ в плоскостях, положение которых определяется азимутальным углом, изменяющимся от α до $\alpha + d\alpha$.

Обозначим поперечники излучающего и освещаемого элементов через dl_1 и dl_2 (рис. 1). Если поперечник dl_1 исчезающе мал по сравнению с расстоянием r , то расходящиеся пучки, идущие от ds_1 к ds_2 , весьма мало отличаются друг от друга и по своему расположению относительно обоих элементов. Совокупность этих пучков, т. е. физический пучок, можно тогда заменить одним расходящимся пучком, идущим от одной из точек, например центральной, излучающего элемента. Очевидно, это будет равносильно замене излучающего элемента точечным источником, причем всю энергию, перенося-

мую физическим пучком, нужно условно приписать одному расходящемуся пучку, падающему от точечного источника на освещаемый элемент ds_2 . В действительности один расходящийся пучок не может переносить энергию, как точка не может ее излучать. Условно говоря о таком переносе, необходимо помнить, что в действительности существующий физический пучок заменен расходящимся пучком лишь для упрощения описания явлений, подобно тому, как, говоря об энергии точечного источника, следует подразумевать условно заменяемый им реальный источник конечных размеров.

По тем же соображениям, физический пучок может быть заменен одним сходящимся пучком, когда поперечник dl_2 освещаемого элемента исчезающе мал в сравнении с расстоянием r . Такой сходящийся пучок будет падать в одну из точек, например центральную, освещаемого элемента, и ему будет условно приписана вся энергия, переносимая в действительности физическим пучком. Поэтому, пользуясь такой заменой, следует помнить, что приписываемая сходящемуся пучку энергия не концентрируется в точке схождения — этого не может быть, как уже было отмечено, — а распределяется по площадке (ds_2 на рис. 1), представляющей сечение заменяемого физического пучка.

Заменяя физический пучок расходящимся, мы предполагали исчезающе малые в сравнении с расстоянием r размеры излучающего элемента, а заменяя тот же пучок сходящимся, предполагали исчезающе малыми в сравнении с расстоянием r размеры освещаемого элемента. В обоих случаях не требовалось никаких условий о размерах другого элемента — освещаемого в первом случае и излучающего во втором; другой элемент мог быть значительно большим.

Обратимся теперь к случаю, когда размеры обоих элементов — излучающего и освещаемого — исчезающе малы в сравнении с расстоянием между ними, хотя один из них может все же значительно превосходить другой. При таком условии становится исчезающе малым различие направлений лучей, составляющих рассматриваемый физический пучок, который может быть поэтому условно заменен параллельным пучком лучей. Так, например, часто считают параллельными пучки, падающие на Землю от звезд. Заметим, однако, что идеально

параллельный пучок не мог бы переносить никакой энергии по той же причине, по какой ее не может переносить отдельный луч, исходящий из точки источника и падающий в точку освещаемой поверхности. Говоря о параллельном пучке, лишь условно можно приписывать ему энергию, в действительности переносимую физическим пучком, в котором лучи обладают некоторым, хотя бы и малым, расхождением. Отсюда следует, что можно заменять параллельный пучок (т. е. заменяемый им физический пучок) и сходящимся и расходящимся пучками. И наоборот, узкие сходящиеся и расходящиеся пучки всегда можно заменить параллельным.

Приведенные рассуждения о пучках лучей сохраняются, если вместо элементов излучающей и освещаемой поверхностей взять такого же контура диафрагмы в пространстве, где распространяются лучи (ds_1 и ds_2 будут поверхности, ограниченные диафрагмами). Из лучей, пронизывающих обе диафрагмы в одном и том же направлении, ими будут отобраны проходящие через ту и другую и образующие физический пучок, который далее может быть заменен расходящимся, сходящимся или параллельным, если это позволяют соотношения размеров диафрагм и расстояния между ними.

Остановимся еще на случае, когда размеры обеих диафрагм или излучающего и освещаемого элементов исчезающе малы в сравнении с расстоянием r между ними. При этом будем неизменно предполагать, что соблюдаются известные условия, исключающие заметное влияние дифракции. Как уже было выяснено, образуемый таким способом физический пучок может быть принят и сходящимся, и расходящимся, и параллельным. Рассматривая его как параллельный пучок бесконечно малой ширины, можно далее заменить этот пучок одним лучом, условно считая такой луч переносящим всю энергию физического пучка. Это оказывается практически очень удобным. Луч, соединяющий две точки, упрощенно обозначает теперь физический пучок, поперечные сечения которого, проходящие через эти точки, имеют бесконечно малые размеры при конечном расстоянии между ними.

На рис. 4 показан физический пучок лучей (a), идущий с площадки 1 на площадку 2, и случаи его замены расходящимся (b), сходящимся (b') и параллельным

(*г*) пучками, а также одним лучом (*д*). Этот рисунок поясняет смысл неоднократно применяемого далее способа рассуждений, в котором идет речь об энергии, переносимой лучом, принимаемым то за расходящийся, то за сходящийся, а то за параллельный элементарный пучок. В отличие от геометрической оптики, где луч — нормаль к волновой поверхности, в фотометрии луч — совокупность прилегающих друг к другу направлений, по которым происходит перенос некоторого количества лучистой энергии [Л. 248].

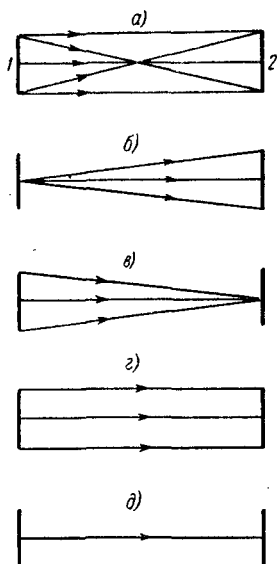


Рис. 4.

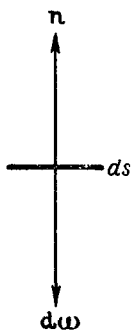


Рис. 5.

Эти представления позволяют характеризовать каждый луч занимаемым им телесным углом и рассматривать в каждой точке луча его сечения, одно из которых принадлежит нормальной к лучу плоскости: таким лучом мы заменяем пучок, имеющий вершину в некоторой точке и всегда являющийся, как

указал Н. Г. Болдырев [Л. 232], пучком ортогональных траекторий некоторого семейства поверхностей.

Пусть ds — нормальное сечение луча, характеризуемого вектором телесного угла $d\omega$. Поток вектора телесного угла через площадку ds , имеющую единичный вектор нормали n ,

$$d^2G = -n d\omega ds.$$

Здесь принято направление векторов, показанное на рис. 5, вследствие чего введен знак минус; отсюда

$$d^2G = d\omega ds. \quad (3)$$

Рассмотрим теперь сходящийся пучок, идущий от элемента ds_1 поверхности s_1 ; вершина его находится на элементе ds_2 поверхности s_2 (рис. 6). Поток вектора

телесного угла элементарных пучков, сходящихся от s_1 на s_2 ,

$$G = - \int_{s_2} \int_{\omega} \mathbf{n}_2 d\omega ds_2, \quad (4)$$

где ω — телесный угол, в пределах которого сходятся лучи на ds_2 ;

\mathbf{n}_2 — единичный вектор нормали к ds_2 .

Подставляя сюда (1), находим:

$$G = \int_{s_1} \int_{s_2} \frac{\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{r^2} ds_1 ds_2; \quad (5)$$

здесь ϑ_1 и ϑ_2 — углы, показанные на рис. 6, где \mathbf{n}_1 — единичный вектор нормали к ds_1 .

Это выражение показывает, что поток вектора телесного угла от s_1 через s_2 равен такому же потоку от s_2 через s_1 . Если s_1 и s_2 — диафрагмы, ограничивающие трубку, то поток G не зависит от происхождения лучей, а определяется лишь размерами и взаимным расположением диафрагм. Он характеризует трубку лучей, проходящих через обе диафрагмы, являясь инвариантом по отношению к любым сечениям пучка, так как вектор телесного угла соленоидален (§ 14). Поток G может быть принят за меру

множества лучей этой трубки [Л. 217], не зависящую от того, за какой из диафрагм находится излучающая поверхность.

Обратимся, наконец, к случаю распространения луча в среде с переменным показателем преломления. Предположим, что ds_0 — элемент поверхности, отделяющей среду с показателем преломления n_1 от среды с показателем n_2 (рис. 7). Луч, характеризуемый вектором телесного угла $d\omega_1$, падает на ds_0 из первой среды. После преломления образуется луч с вектором телесного угла $d\omega_2$. Обозначим через ϑ_1 и ϑ_2 острые углы, составляемые векторами $d\omega_1$ и $d\omega_2$ с нормалью к ds_0 ; тогда

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2.$$

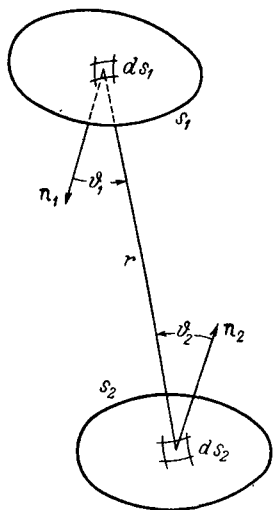


Рис. 6.

Возводя в квадрат обе части этого выражения и дифференцируя, имеем:

$$n_1^2 \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 d\vartheta_1 = n_2^2 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_2 d\vartheta_2. \quad (6)$$

Заметим, что

$$\cos \vartheta_1 = \frac{ds_1}{ds_0}, \quad (7)$$

$$a \quad \cos \vartheta_2 = \frac{ds_2}{ds_0}, \quad (8)$$

где ds_1 и ds_2 — нормальные сечения луча до и после преломления.

Далее, согласно (2),

$$d\omega_1 = \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 dx;$$

$$d\omega_2 = \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 dx$$

(азимутальный угол, измеряемый в плоскости элемента ds_0 , для обеих лучей одинаков, так как они находятся в одной плоскости).

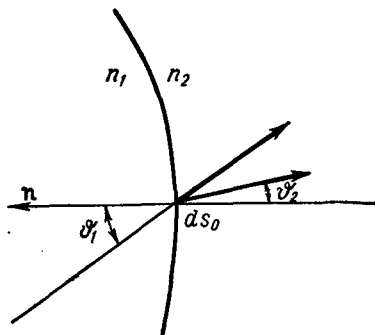


Рис. 7.

Подставляя последние выражения в (6), получим соотношение, выражающее теорему Штраубеля [Л. 62]:

$$n_1^2 d\omega_1 ds_1 = n_2^2 d\omega_2 ds_2. \quad (9)$$

Принимая во внимание (3), найдем из (9), что во всех точках луча

$$n^2 d^2 G = \text{const};$$

отсюда следует инвариант Гершуна [Л. 248]:

$$n^2 G^2 = \text{const}, \quad (10)$$

т. е. произведение меры множества лучей любого физического пучка на квадрат показателя преломления остается неизменным при всех преломлениях, претерпеваемых пучком.

Не рассматривая преломления и зеркального отражения, будем полагать, что все элементарные пучки лучей, вводимые далее, гомоцентричны и что астигматизм возникает лишь при падении их на гладкие поверхности раздела двух сред.

§ 2. Лучистый поток и вектор радиации

Чтобы судить о распределении лучистой энергии во времени, необходимо ввести понятие лучистой мощности, называемой лучистым потоком. Связь между лучистым потоком и лучистой энергией — обычная связь мощности и энергии. Лучистый поток представляет собой расход лучистой энергии в единицу времени; этот расход происходит в процессах ее возникновения, распространения и превращения в другие виды энергии. Единица лучистого потока — ватт.

Когда луч падает на какую-либо площадку, говорят, что на нее падает лучистый поток, приносимый лучом (точнее было бы сказать, что падает какое-то, приносимое лучом, количество лучистой энергии в единицу времени). Рассматривая явление макроскопически и предполагая, что радиация имеет свойства стационарного случайного процесса, будем считать этот поток постоянным во времени, пока с лучом не произойдет каких-либо изменений, зависящих, например, от изменения мощности или от перемещения посылающего луч источника и тому подобных причин. Если же, отвлекаясь от макроскопического рассмотрения, принять во внимание электромагнитные колебания, то нужно было бы считать этот поток переменным во времени. Он равен потоку вектора Пойнтинга через рассматриваемую площадку [Л. 404]. Следовательно, лучистый поток, рассматриваемый макроскопически, равен среднему во времени из обусловленных колебательным процессом значений потока вектора Пойнтинга.

Обозначим через \mathbf{P} мгновенное значение этого вектора. Мгновенное значение его потока через площадку ds будет равно $\mathbf{Pn} ds$, где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к ds . Среднее значение того же потока в течение времени t , т. е. падающий на площадку лучистый поток,

$$dP = \frac{ds}{t} \int_0^t \mathbf{Pn} dt.$$

Последнее выражение можно переписать еще так:

$$dP = \frac{\mathbf{n} ds}{t} \int_0^t \mathbf{P} dt,$$

т. е. представляя лучистый поток с помощью скалярного произведения вектора \mathbf{n} ds на новый вектор, который обозначим через \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{P} dt. \quad (11)$$

Этот вектор ввел С. О. Майзель [Л. 235], назвав его вектором радиации. Слово «радиация» он применял при этом в принятом выше (см. стр. 7) смысле.

Возвращаясь к вычислению лучистого потока, падающего на площадку ds , можем теперь написать:

$$dP = \mathbf{Dn} ds; \quad (12)$$

отсюда следует, что лучистый поток есть поток вектора радиации.

Мы не делали до сих пор никаких предположений о числе и направлении лучей, падающих на рассматриваемую площадку. Положим теперь, что на площадку ds падает несколько различно направленных лучей. Здесь и в дальнейшем будем всегда считать, что такие лучи некогерентны. Таким образом, интерференция не будет иметь места, а будет соблюдаться принцип суперпозиции, в силу которого на площадку падает лучистый поток, равный сумме потоков, приносимых всеми пересекающими ее лучами. Пусть \mathbf{D}' , \mathbf{D}'' , ... — векторы радиации этих лучей. Полный поток, падающий на площадку,

$$dP = \mathbf{D}' \mathbf{n} ds + \mathbf{D}'' \mathbf{n} ds + \dots = (\mathbf{D}' + \mathbf{D}'' + \dots) \mathbf{n} ds = \mathbf{Dn} ds,$$

где \mathbf{D} — результирующий вектор радиации, равный сумме векторов радиации лучей, падающих на площадку. Как видно, поток этого вектора через площадку равен падающему на нее лучистому потоку.

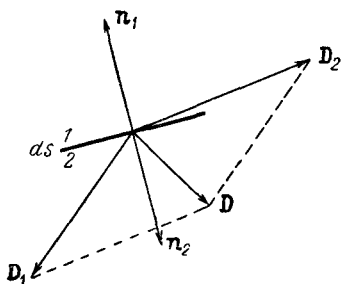
Когда лучи падают на обе стороны некоторой площадки, можно рассматривать два так же составленных результирующих вектора, один из которых зависит от лучей, падающих на одну сторону площадки, а другой — на другую. Обозначим стороны площадки ds цифрами 1 и 2 (рис. 8), нормали к ним будут \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 , результирующие векторы радиации — \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 . Эти векторы, будучи сложены, дают полный результирующий вектор радиации в рассматриваемой точке:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2,$$

не зависящий, очевидно, от взятой площадки, поскольку он равен сумме векторов радиации всех пересекающихся в этой точке лучей. Поток такого вектора через площадку

$$dP = \mathbf{Dn}_2 ds = (\mathbf{D}_1\mathbf{n}_2 + \mathbf{D}_2\mathbf{n}_2) ds.$$

Рассматривая две стороны площадки, необходимо условиться о том, на какой из векторов нормали умножать результирующий вектор радиации, создаваемый лучами, падающими на какую-либо сторону, чтобы получить падающий на ту же сторону поток. Условимся перемножать векторы, относящиеся к одной и той же стороне, т. е. имеющие одинаковые цифровые отметки. Тогда лучистый поток, падающий на сторону 1,



$$dP_1 = -\mathbf{D}_1\mathbf{n}_1 ds,$$

а на сторону 2

$$dP_2 = -\mathbf{D}_2\mathbf{n}_2 ds$$

Рис. 8.

(знаки минус поставлены потому, что углы между перемножаемыми векторами тупые).

Замечая далее, что

$$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2,$$

имеем:

$$dP_1 = \mathbf{D}_1\mathbf{n}_2 ds.$$

Сравнивая эти выражения с предыдущим выражением dP , находим:

$$dP = dP_1 - dP_2.$$

Таким образом, в общем случае падения лучей на обе стороны площадки, поток результирующего вектора радиации через эту площадку равен разности лучистых потоков, падающих на ее стороны. Легко убедиться в том, что выводы, сделанные ранее для частного случая падения лучей на одну сторону площадки, представляют следствия последнего положения. Лучистый поток во всех случаях оказывается потоком вектора радиации.

При этом вектор радиации, названный выше полным результирующим, равный сумме векторов радиации всех лучей, пересекающихся в рассматриваемой точке, может быть выражен той же формулой (11), что и в случае одного луча, если в ней понимать под Π сумму мгновенных значений вектора Пойнтинга.

Вектор радиации может быть связан еще с ее давлением (давлением света). Если луч падает на элемент поверхности ds , принося лучистый поток dP , то, согласно электромагнитной теории, в точке падения появляется давящая на эту поверхность по нормали к ней сила, пропорциональная потоку dP и косинусу угла падения (острый угол между лучом и нормалью к поверхности). Представим себе весьма малый шарик, имеющий однородную поверхность, на который падают лучи с разных сторон. Лучистый поток dP , падающий на шарик от каждого луча, равен потоку, падающему от этого луча на перпендикулярный ему большой круг шарика. Если \mathbf{D} — вектор радиации луча, а ds — площадь большого круга, то

$$dP = |\mathbf{D}| ds.$$

Замечая, что в данном случае направления нормали к ds и вектора радиации составляют 180° , заключаем, что сила давления определяется вектором радиации как по величине, так и по направлению. Отсюда следует, что результирующая сила давления радиации всех лучей на шарик совпадает по направлению с результирующим вектором радиации, существующим в окруженной шариком точке, и пропорциональна ему по величине. Иначе говоря, вектор радиации определяет величину и направление силы давления света на весьма малый шарик, окружающий точку, в которой существует этот вектор.

§ 3. Спектральные характеристики радиации

Понятия лучистого потока и вектора радиации необходимо связывать с распределением энергии в спектре. Простейший случай спектрального состава рассматривается в виде однородной (или монохроматической) радиации, характеризуемой лишь одним значением длины волны или частоты. Надо заметить, что в действительности

однородная радиация не может существовать изолированно от радиации смежных частот. Радиация всегда характеризуется бесконечно большим числом значений частоты, непрерывно заполняющих конечный промежуток изменения последней. Однако во многих случаях этот промежуток довольно мал. Отношение промежутка к среднему в его пределах значению частоты может быть, например, порядка 10^{-6} . В таких случаях, для упрощения, считают, что этому среднему значению частоты соответствует вся энергия, распределенная по частотам конечного промежутка. Примером такого рода квазиоднородной радиации, условно принимаемой за однородную, служат линии, наблюдаемые в спектроскопе.

Спектр сложной радиации, в котором наблюдаются все возможные в некоторых пределах значения частоты, называют сплошным. Его можно рассматривать как совокупность квазиоднородных радиаций, непрерывно заполняющую некоторый промежуток изменения частоты. Каждой квазиоднородной радиации соответствует какой-то лучистый поток, сумма таких потоков равна лучистому потоку сплошного спектра.

Отсюда ясно, что существует какое-то распределение потока или энергии в спектре. Для описания этого распределения предположим, что выполнено условие

$$P = \text{const}, \quad (13)$$

и что радиацию можно рассматривать как стационарный процесс. Для такого процесса всегда существует распределение мощности по интервалам частоты, однозначно определяемое величиной, представляющей производную мощности по частоте и называемой спектральной плотностью. Применительно к радиации эта величина — спектральная плотность потока, рассматриваемая в функции частоты ν :

$$\tilde{p}(\nu) = \frac{dP}{d\nu}. \quad (14)$$

Функция $p(\nu)$ может служить для описания распределения лучистого потока в спектре и для вычисления потока в том или ином спектральном интервале. Распределение потока в спектре можно представлять, однако, не только в зависимости от частоты. Принципиально возможно рассматривать это распределение

в функции любой величины, однозначно связанной с частотой [Л. 289]. Всякую такую величину будем называть спектральной координатой, а спектральной шкалой — осью, по которой отложены ее значения.

Пользуясь некоторой спектральной координатой

$$x = f(\nu), \quad (15)$$

следует рассматривать спектральную плотность

$$p(x) = \frac{dP}{dx};$$

тогда лучистый поток

$$P = \int p(x) dx; \quad (16)$$

интегрирование выполняется здесь в пределах рассматриваемого интервала спектральной шкалы.

Исследуя радиацию заданного спектрального состава, можно переходить от одной спектральной координаты к другой. Для этого служит уравнение перехода от координаты x_1 к координате x_2 [Л. 358]:

$$p(x_1) dx_1 = p(x_2) dx_2. \quad (17)$$

Оно выражает, очевидно, условие равенства лучистых потоков в интервалах двух спектральных шкал, представляющих один и тот же интервал спектра. Из него следует, что отношение спектральных плотностей

$$\frac{p(x_2)}{p(x_1)} = \frac{dx_1}{dx_2}, \quad (18)$$

т. е. определяется функциональной связью рассматриваемых спектральных шкал. Эти соотношения означают, что лучистый поток инвариантен к преобразованиям спектральных координат [Л. 380].

Лучистый поток в интервале dx

$$dP = p(x) dx.$$

Разделив этот поток на энергию $h\nu$ фотона частоты ν , (h — постоянная Планка), связанной с координатой x согласно (15), получим расходуемое в единицу времени число фотонов dN , или, короче говоря, расход фотонов в том же интервале спектра. Спектральная плотность расхода фотонов

$$n(x) = \frac{dN}{dx}. \quad (19)$$

Она связана со спектральной плотностью лучистого потока очевидным соотношением [Л. 358]

$$n(x) = \frac{p(x)}{h\nu}. \quad (20)$$

Уравнение (20) показывает, что экстремумы спектральных плотностей $p(x)$ и $n(x)$ находятся в разных местах спектра. Положение максимумов той и другой спектральной плотности зависит от вида функции (15) [Л. 120]. Это легко понять, если принять во внимание, что применительно к каждой спектральной шкале такие максимумы определяют наибольшие значения, соответственно, лучистого потока и расхода фотонов, в интервале данной шкалы, связанном с интервалами других шкал уравнением (17).

Смещение максимума плотности потока при изменении спектральной координаты долго порождало недоразумения, так как думали, что в спектре существует «максимум энергии», место которого не должно зависеть от вида спектральной шкалы [Л. 343]. В действительности же, как показал Гершун [Л. 289], каждая спектральная характеристика $p(x)$ или $n(x)$ определяет лишь максимум соответственной спектральной плотности, а не энергии или какой-либо другой величины.

В том случае, когда $f(\nu) = \lambda$, т. е. спектральной шкалой служит шкала длин волн, спектральную плотность потока, обозначаемую далее через p_λ , обычно называют спектральной интенсивностью.

В логарифмических шкалах

$$x = \ln \nu,$$

$$x = \ln \lambda$$

спектральные плотности потока имеют максимумы при одной и той же частоте [Л. 289], а размерность — совпадающую с размерностью лучистого потока. Спектральные плотности расхода фотонов в этих шкалах безразмерны.

С помощью уравнения (17) всегда может быть найдена такая спектральная шкала, в которой $p(x) = \text{const}$, и такая шкала, в которой $n(x) = \text{const}$ [Л. 358]. В первом случае получается спектр, называемый равноэнергетическим, так как одинаковые интервалы

спектральной шкалы содержат здесь равные потоки, а следовательно, и равные количества энергии. Спектр, получаемый во втором случае, в подобном же смысле может быть назван равнофотонным [Л. 358] или равноквантовым.

Преобразование спектра к равноэнергетической или равноквантовой форме осуществимо и экспериментально [Л. 378].

Можно пользоваться любой спектральной шкалой, какая оказывается предпочтительной в зависимости от решаемой задачи. Логарифмическая шкала удобна для графического изображения спектров: все октавы имеют в ней одинаковую длину. Шкала частот, сохраняющих свои значения при переходе из одной среды в другую, может быть предпочтительной в задачах, где это имеет место. Если нет особых условий, то для описания распределения энергии в спектре следует пользоваться привычной шкалой длин волн, наиболее удобной в связи с тем, что обычно к ней относятся справочные данные.

Вектор радиации также может быть разложен по спектру. В случае линейчатого спектра каждая линия дает свой спектр; сумма таких векторов образует результирующий вектор радиации. В случае сплошного спектра вектор радиации образуется сложением элементарных векторов, получаемых от отдельных участков спектра, в пределах которых длина волны может изменяться сколь угодно мало.

§ 4. Преобразование радиации телами

Луч претерпевает те или другие изменения, встречая какое-либо тело на своем пути. Может измениться направление и строение пучка, занимаемый им телесный угол, поток и поляризация. Рассмотрим преобразование лучистого потока падающего луча в предположении, принимаемом везде в дальнейшем, что падающий поток не настолько велик, чтобы возникло нарушение суперпозиции при распространении радиации в рассматриваемой среде, т. е. не учитывая оптическую нелинейность этой среды.

Пусть однородный луч длины волны λ падает на некоторое тело, принося лучистый поток (падающий) $P_{\lambda\text{пад}}$. В общем случае часть $P_{\lambda\text{отр}}$ этого потока будет

отражена телом, часть $P_{\lambda\text{пр}}$ — пропущена, часть $P_{\lambda\text{пог}}$ — поглощена, т. е. перейдет в другого вида мощность. Закон сохранения энергии требует, чтобы три последних потока в сумме были равны падающему:

$$P_{\lambda\text{пад}} = P_{\lambda\text{отр}} + P_{\lambda\text{пр}} + P_{\lambda\text{пог}}. \quad (21)$$

Способность тела отражать, пропускать и поглощать лучистую энергию длины волны λ характеризуют тремя коэффициентами:

спектральным коэффициентом отражения

$$\rho_{\lambda} = \frac{P_{\lambda\text{отр}}}{P_{\lambda\text{пад}}};$$

спектральным коэффициентом пропускания (или прозрачности)

$$\tau_{\lambda} = \frac{P_{\lambda\text{пр}}}{P_{\lambda\text{пад}}};$$

спектральным коэффициентом поглощения

$$\alpha_{\lambda} = \frac{P_{\lambda\text{пог}}}{P_{\lambda\text{пад}}}.$$

В силу условия (21),

$$\rho_{\lambda} + \tau_{\lambda} + \alpha_{\lambda} = 1. \quad (22)$$

Зависимость этих коэффициентов от длины волны связана с веществом и состоянием поверхности тела, а также с тем, какова окружающая тело среда. Кроме того, спектральные коэффициенты могут зависеть еще от состояния поляризации падающей радиации, от угла падения, а также от агрегатного состояния и температуры тела. В случае зависимости коэффициентов от угла падения их значения будут изменяться в зависимости от числа и направления падающих лучей, т. е. от условий освещения тела.

Положим теперь, что падающий на тело луч имеет сложный спектр. Полный отраженный телом лучистый

поток $P_{\text{отр}}$ будет равен сумме отраженных монохроматических потоков, т. е.

$$P_{\text{отр}} = \sum \rho_{\lambda} P_{\lambda \text{пад}}.$$

В частности, для сплошного спектра

$$P_{\text{отр}} = \int \rho_{\lambda} p_{\lambda} d\lambda,$$

где p_{λ} — спектральная интенсивность падающего потока¹.

Коэффициент отражения в случае сложного спектра, называемый иногда полным или интегральным,

$$\rho = \frac{P_{\text{отр}}}{P_{\text{пад}}},$$

т. е. для сплошного спектра,

$$\rho = \frac{\int \rho_{\lambda} p_{\lambda} d\lambda}{\int p_{\lambda} d\lambda}. \quad (23)$$

Подобным же образом выражаются в случае сложного спектра полные коэффициенты пропускания и поглощения. Полные коэффициенты отражения, пропускания и поглощения в сумме равны единице, как и спектральные.

Заметим, что каждый из полных коэффициентов, согласно (23), зависит от двух функций длины волны: одной, представляющей зависимость соответственного спектрального коэффициента от длины волны, и другой, характеризующей распределение энергии в падающем потоке. Значение полного коэффициента может совпадать со спектральным лишь в частных случаях, т. е. для отдельных длин волн или тогда, когда спектральный коэффициент постоянен по всему спектру.

Тела, у которых спектральные коэффициенты не зависят от длины волны, называют серыми, а в противном случае — избирательно (селективно) отражающими, поглощающими или пропускающими. Не бывает тел, серых для всего спектра. Свойства серого тела с тем или иным приближением могут наблюдаться лишь в некоторых пределах изменения длины

¹ Пределами интегрирования, не обозначаемыми для сокращения письма, служат границы сплошной области спектра.

волны. Поэтому, характеризуя тело как серое, следует оговаривать, какой участок спектра имеется в виду.

Для обобщения рассуждений о явлениях, происходящих при встрече луча с каким-либо телом, можно ввести еще коэффициент изменения χ , характеризующий преобразование лучистого потока. В частных случаях этот коэффициент принимает следующие значения:

для отраженного потока

$$\chi = \rho; \quad (24)$$

для вошедшего в тело

$$\chi_s = 1 - \rho; \quad (25)$$

для поглощенного

$$\chi = \alpha; \quad (26)$$

для прошедшего сквозь тело

$$\chi = \tau. \quad (27)$$

§ 5. Спектральная чувствительность и редуцированный поток

Различные тела, органы и устройства, подвергающиеся действию лучистой энергии, рассматривают как ее приемники, а явления, происходящие в них при этом, — как их реакции. Для применения этих явлений важно изучение их зависимости от действующей на приемники энергии, т. е. выяснение вопроса о том, ценой каких затрат лучистой энергии может быть получена та или иная полезная реакция. Такое изучение показывает, что, во-первых, реакция происходит за счет поглощаемой приемником энергии. Во-вторых, во многих случаях не вся поглощаемая энергия идет на основную реакцию, часть — на побочные. В-третьих, реакция может быть различной в зависимости от длины волны, при одних и тех же лучистых потоках каждой длины волны, падающих на приемник. В-четвертых, реакция может изменяться в зависимости от условий облучения приемника. В-пятых, реакция может зависеть от других условий, в которых находится приемник.

Приемники, реакция которых зависит от длины волны, называют избирательными (или селек-

тивными). В действительности таковы все приемники без исключения. Однако иногда избирательность бывает слабо выражена в некоторых областях спектра, где ею практически можно пренебрегать. Тогда приемники считают неизбирательными.

Причины избирательности, с одной стороны,— оптические, поскольку расходуемая на реакцию энергия зависит от спектрального коэффициента поглощения, различного для разных частот. С другой стороны, изменения, происходящие в веществе приемника под влиянием лучистой энергии, в силу квантовых соотношений зависят в ряде случаев от энергии отдельных фотонов. Поэтому, при одной и той же полной энергии, воздействующей на приемник, наличие фотонов, обладающих большей энергией, дает один эффект, в то время как большее число фотонов с меньшей энергией — другой, т. е. реакция приемника зависит от длины волны.

Существование избирательных явлений приводит к необходимости оценивать лучистую энергию соответственно ее воздействию на приемники. Представим себе некоторый лучистый поток при длине волны λ_1 , вызывающий реакцию приемника. Добавим к этому такой же лучистый поток при другой длине волны λ_2 , на которую рассматриваемый приемник не реагирует. Лучистый поток увеличился вдвое, но реакция приемника не изменилась. Если же будет изменяться первоначально взятый поток при длине волны λ_1 , то будет происходить и изменение реакции. Отсюда очевидно, что при воздействии сложной радиации на избирательные приемники нет возможности судить о реакции только по значению лучистого потока.

Обозначим через S реакцию приемника, измеренную в тех или иных единицах. Приемнику обычно свойственна инерционность, вызывающая после его включения или начала воздействия радиации переходный процесс [Л. 402], в котором реакция так или иначе изменяется во времени. Затем наступает установившийся процесс, в котором, при условии (13), реакция принимает некоторое значение

$$S = \text{const.}$$

Далее будем рассматривать соотношения, имеющие место в таком именно установившемся процессе.

Предположим, что на приемник падает радиация сложного спектрального состава. В случае сплошного спектра действие его участка $d\lambda$ на линейный приемник характеризуется отношением s_λ реакции dS_λ , получаемой при падении на приемник лучистого потока dP_λ этого участка, к dP_λ :

$$s_\lambda = \frac{dS_\lambda}{dP_\lambda}.$$

Это отношение, измеренное в единицах реакции на ватт, будет иметь наибольшее значение $s_{\text{макс}}$ при некоторой длине волны λ_m , к которой приемник наиболее чувствителен. Тогда чувствительность приемника к различным длинам волн λ удобно оценить числом, обратным тому, которое показывает, во сколько раз лучистый поток при длине волны λ должен быть больше, чем при длине волны λ_m , чтобы реакция была в обоих случаях одинаковой.

Таким образом, если при некоторых значениях потоков dP_λ и dP_{λ_m} реакция оказалась одинаковой, то спектральной чувствительностью приемника к длине волны λ называют отношение

$$\sigma_\lambda = \frac{dP_{\lambda_m}}{dP_\lambda}.$$

С другой стороны, при этом

$$s_\lambda dP_\lambda = s_{\text{макс}} dP_{\lambda_m},$$

на основании чего спектральная чувствительность может быть выражена так:

$$\sigma_\lambda = \frac{s_\lambda}{s_{\text{макс}}}.$$

Величину s_λ можно рассматривать как абсолютную спектральную чувствительность, в отличие от σ_λ , представляющей относительное ее значение.

Реакция при действии всего спектра

$$S = \int dS_\lambda = \int s_\lambda dP_\lambda.$$

В последней формуле выражен принцип аддитивности реакции приемника на различные длины волн, который подразумевался в предыдущих рассуждениях: реакции арифметически складываются, вследствие чего полная реакция определяется суммой эффективных потоков всех воздействующих на приемник длин волн.

Вводя спектральную интенсивность p_λ , получим:

$$S = \int s_\lambda p_\lambda d\lambda,$$

или

$$S = s_{\text{макс}} \int \tau_\lambda p_\lambda d\lambda.$$

Отношение реакции, вызываемой лучистым потоком сложного спектрального состава, к этому потоку, равное

$$s_{\text{макс}} \frac{\int \tau_\lambda p_\lambda d\lambda}{\int p_\lambda d\lambda},$$

характеризует абсолютную интегральную чувствительность приемника. Относительная интегральная чувствительность получается отсюда делением на $s_{\text{макс}}$.

Положим, что на некоторый приемник падает лучистый поток P_λ при длине волны λ . Действие приемника происходит за счет поглощаемой приемником части этого потока

$$\alpha_\lambda P_\lambda,$$

где α_λ — спектральный коэффициент поглощения радиации длины волны λ приемником.

В зависимости от длины волны та или иная часть поглощаемого потока может быть израсходована на побочные явления, сопутствующие основной реакции. Поэтому расходуемый на полезную реакцию приемника поток (полезный)

$$P_{\text{пол}} = \beta_\lambda \alpha_\lambda P_\lambda, \quad (28)$$

где $\beta_\lambda \leq 1$ — доля поглощенного потока длины волны λ , идущая на основную реакцию приемника¹.

¹ Поток $P_{\text{пол}}$ равен расходуемой в единицу времени энергии, которую В. В. Мешков называет эффективной [Л. 309].

Коэффициент β_λ равен, таким образом, отношению полезного потока к поглощенному приемником при длине волны λ , т. е. энергетическому выходу [Л. 309], определяемому в случае рассматриваемой однородной радиации.

Если основная или полезная реакция измеряется отдаваемой приемником энергией какого-либо вида или соответственной мощностью, то последняя должна быть равна полезному потоку (28). Если же полезная реакция измеряется не мощностью на выходе приемника, а какой-либо другой величиной, то вследствие упомянутых выше квантовых соотношений у избирательного приемника, в зависимости от длины волны, реакция может быть различной при одном и том же значении расходуемого на нее потока $P_{\text{пол}}$. Поэтому, когда на такой приемник падает несколько однородных потоков разных длин волн, то реакция должна определяться суммой расходуемых на нее частей $\beta_\lambda \alpha_\lambda$ этих потоков, взятых с некоторыми весами, т. е. коэффициентами, учитывающими долю участия этих потоков в образовании реакции.

Для уяснения смысла этих коэффициентов будем рассуждать следующим образом. Пусть при длинах волн λ_1 и λ_2 расходуемые на полезную реакцию лучистые потоки оказались одинаковыми:

$$\beta_1 \alpha_1 P_1 = \beta_2 \alpha_2 P_2 = P.$$

При этом зависящие от них реакции могут быть различными. Изменяя оба потока, можно найти такие их значения:

$$g_1 \beta_1 \alpha_1 P_1;$$

$$g_2 \beta_2 \alpha_2 P_2,$$

при которых соответственные реакции станут равными.

Рассматривая затем другие значения λ , для которых также

$$\beta_\lambda \alpha_\lambda P_\lambda = P,$$

найдем, таким образом, ряд чисел g_λ . Для некоторой длины волны число g_λ будет наименьшим: $g_{\text{мин}}$. Тогда

доля участия потока $\beta_\lambda \alpha_\lambda P_\lambda$ в образовании общей реакции будет определяться отношением

$$\gamma_\lambda = \frac{g_{\text{мин}}}{g_\lambda} \leq 1,$$

представляющим тот вес, который нужно придать потоку каждой длины волны при определении суммарной реакции приемника, подверженного воздействию радиации сложного спектрального состава [Л. 217].

Таким образом, реакция приемника, вызываемая однородным потоком P_λ , будет определяться во всех случаях величиной

$$\gamma_\lambda \beta_\lambda \alpha_\lambda P_\lambda,$$

т. е. частью γ_λ лучистого потока $\beta_\lambda \alpha_\lambda P_\lambda$, расходуемого на полезную реакцию.

В общем случае вес γ_λ имеет физический смысл коэффициента, учитывающего степень использования лучистого потока, расходуемого на полезную реакцию; он показывает, какая доля этого лучистого потока при длине волны λ используется столь же эффективно, как и лучистый поток при длине волны λ_m . Следовательно, величина

$$\gamma_\lambda \beta_\lambda \alpha_\lambda P_\lambda$$

представляет лучистый поток, эффективно расходуемый на полезную реакцию приемника и равный части падающего на приемник лучистого потока, определяемой произведением $\gamma_\lambda \beta_\lambda \alpha_\lambda$. Этот поток назовем [Л. 244] эффективным.

Разумеется, на полезную реакцию всегда (при любых значениях γ_λ) затрачивается полезный поток (28). Но реакция количественно определяется эффективным потоком, который равен полезному потоку лишь в частном случае $\gamma_\lambda = 1$, когда реакция измеряется мощностью на выходе приемника. В этом частном случае значения эффективного потока и реакции, измеренные в одинаковых единицах, совпадают. Для других приемников эффективный поток представляет часть воздействующего на приемник потока, определяющую их полезную реакцию.

Произведение $\gamma_\lambda \beta_\lambda \alpha_\lambda$ трех коэффициентов, характеризующих приемник, имеет максимум при той длине волны λ_m , к которой приемник наиболее чувствителен. Положим, что падающий на приемник поток P_λ вызывает такую же реакцию, как поток P_{λ_m} . Это значит, с одной стороны, что равны соответствующие эффективные потоки, т. е.

$$\gamma_\lambda \beta_\lambda \alpha_\lambda P_\lambda = (\gamma_\lambda \beta_\lambda \alpha_\lambda)_{\text{макс}} P_{\lambda_m}.$$

С другой стороны, при этом должно быть соблюдено условие:

$$P_{\lambda_m} = \sigma_\lambda P_\lambda,$$

где σ_λ — спектральная чувствительность приемника при длине волны λ .

Из последних уравнений находим:

$$\sigma_\lambda = \frac{\gamma_\lambda \beta_\lambda \alpha_\lambda}{(\gamma_\lambda \beta_\lambda \alpha_\lambda)_{\text{макс}}}.$$

Эффективный лучистый поток, выраженный через спектральную чувствительность,

$$P_{\text{эфф}} = (\gamma \beta \alpha)_{\text{макс}} \sigma_\lambda P_\lambda,$$

если он измерен в тех же единицах, что и падающий на приемник поток.

Когда приемник подвергается воздействию сплошного спектра, эффективный поток

$$P_{\text{эфф}} = (\gamma \beta \alpha)_{\text{макс}} \int \sigma_\lambda p_\lambda d\lambda. \quad (29)$$

Характеризующие приемник коэффициенты α_λ , β_λ и γ_λ могут зависеть от условий, в которых он находится. В частности, для некоторых приемников эти коэффициенты могут также зависеть от условий облучения. Последнее обстоятельство приводит к тому, что при неизменном распределении энергии в спектре действующей на приемник радиации эффективный поток может изменяться не пропорционально падающему на приемник лучистому потоку, если даже для этого нет других причин.

Для большинства приемников могут быть, однако, определены условия их применения, в которых спектральную чувствительность для каждой волны, а также значение $(\gamma\beta\alpha)_{\text{макс}}$ можно считать постоянными. В таких условиях реакция приемника может быть удобно определена еще пропорциональной эффективному лучистому потоку величиной

$$P_{\text{ред}} = \frac{kP_{\text{эфф}}}{(\gamma\beta\alpha)_{\text{макс}}} = k \int \sigma_{\lambda} p_{\lambda} d\lambda, \quad (30)$$

называемой [Л. 204] редуцированным лучистым потоком¹. Здесь k — переводный множитель от единиц лучистого потока к единицам, в которых измеряется редуцированный поток.

Понятие редуцированного потока применимо и к неаддитивным приемникам, если их реакции наблюдаются при ограничениях мощности и спектра на входе, в пределах которых эти приемники приближенно аддитивны.

Удобство пользования редуцированным потоком обусловлено тем, что для его вычисления нет надобности иметь значение $(\gamma\beta\alpha)_{\text{макс}}$. Спектральная же чувствительность σ_{λ} , от которой он зависит, может быть найдена из опыта, как отношение лучистых потоков, необходимых для получения от приемника одинаковой реакции при длинах волн λ_m и λ , или же как отношение реакций, получаемых при воздействии одинаковых лучистых потоков этих длин волн.

Редуцированный поток можно определить, как лучистый поток, оцененный по воздействию, производимому им на приемник. Его отношение к лучистому потоку называют отдачей радиации. Если оба потока выражены в одинаковых единицах, то отдачу называют коэффициентом полезного действия радиации (применительно к рассматриваемому приемнику). К. п. д. радиации совпадает с относительной интегральной чувствительностью приемника.

Некоторые приемники обнаруживают одновременно или в разных условиях несколько различных реакций. Для них может идти речь о нескольких, определяемых

¹ Не рассматривая эффективный поток в указанном выше смысле, этим термином обозначают редуцированный поток [Л. 309].

по этим реакциям, спектральных чувствительностях, а также эффективных и редуцированных потоках.

Рассмотрим соотношение редуцированного, эффективного и падающего на приемник потоков в простейшем случае, когда энергия, падающая на приемник, полностью переходит в тепло. Следовательно, образование тепла — основная реакция такого приемника. Тогда для всех значений длины волны будут иметь место условия $\lambda = \alpha_\lambda$, $\beta_\lambda = \gamma_\lambda = 1$, и спектральная чувствительность

$$\sigma_\lambda = \frac{\alpha_\lambda}{\alpha_{\max}}$$

Предположим, что зависимость коэффициента поглощения α_λ от длины волны известна, как и распределение энергии в спектре

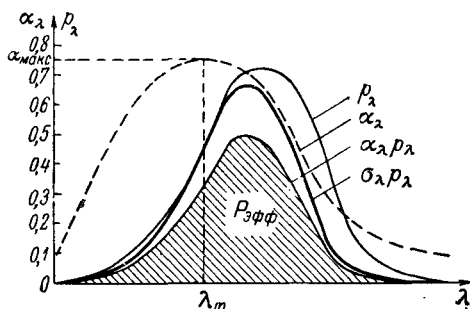


Рис. 9.

падающей на приемник радиации, изображенное на рис. 9 зависимостью спектральной интенсивности p_λ от длины волны. Площадь, ограниченная этой кривой и осью абсцисс, представляет падающий на приемник лучистый поток.

Перемножив ординаты кривой спектральной интенсивности на соответствующие тем же длинам волн значения коэффициента поглощения, построим новую кривую, ординаты которой, как показано на рис. 9, равны $\alpha_\lambda p_\lambda$ или $\alpha_{\max} \sigma_\lambda p_\lambda$. Заштрихованная площадь, ограниченная этой кривой и осью абсцисс, представляет, согласно формуле (29), эффективный лучистый поток, выраженный в тех же единицах, что и падающий. С другой стороны, будучи равна $\int \alpha_\lambda p_\lambda d\lambda$, эта площадь представляет лучистый поток, поглощенный приемником, т. е. развиваемую приемником тепловую мощность. Отсюда ясен простой в рассматриваемом случае физический смысл эффективного потока.

Построим теперь на том же графике еще одну кривую с ординатами, равными $\sigma_\lambda p_\lambda$. В то время как ординаты предыдущей кривой были меньше соответствующих значений спектральной интенсивности, так как $\alpha_\lambda < 1$ для всех значений длины волны, последняя (жирная) кривая в одной точке совпадает с кривой спек-

тральной интенсивности, эта точка имеет абсциссу λ_m , для которой $\alpha_\lambda = \alpha_{\text{макс}}$ и $\sigma_\lambda = 1$. Площадь, ограниченная последней кривой и осью абсцисс, равна

$$\int \sigma_\lambda p_\lambda d\lambda,$$

т. е., как видно из формулы (30), представляет редуцированный для данного приемника лучистый поток, выраженный в тех же единицах, что и падающий. Отношение этих потоков (при $k=1$)

$$\frac{P_{\text{эфф}}}{P_{\text{ред}}} = \alpha_{\text{макс}},$$

откуда ясно, что оно не зависит от спектрального состава падающей на приемник радиации.

Редуцированный поток при всех обстоятельствах будет изменяться пропорционально эффективному. Он будет, следовательно, пропорционален реакции приемника — развиваемой тепловой мощности, но не будет равен последней. Такой приемник имеет практическое значение в инфракрасной технике и в гелиотехнике, так как превращение лучистой энергии в тепловую применяется для сушки и осуществляется в установках, служащих для использования солнечной энергии.

После того как установлено, что всякий спектр может быть описан с помощью любой спектральной шкалы, необходимо рассмотреть вопрос о соответствии спектральных характеристик радиации и приемников. Обращаясь к этому, заметим, что аналогично редуцированному потоку может быть введен редуцированный расход фотонов. Рассматривая спектральные плотности этих величин, легко видеть, что при перемене спектральной шкалы — при переходе, например, от шкалы x_1 к шкале x_2 — они будут изменяться в соответствии с уравнением (18).

Следовательно, все редуцированные потоки, как и редуцированные расходы фотонов, инвариантны к спектральным преобразованиям. Поэтому инвариантны к спектральным преобразованиям и отношения: с одной стороны — редуцированного и лучистого потоков, с другой — редуцированного и исходного расходов фотонов.

Рассмотрим координату x в интервале dx некоторой спектральной шкалы. Из инвариантности лучистого и редуцированного потоков в интервале dx следует, что их отношение, т. е. спектральная чувствительность $\sigma(x)$ также не зависит от спектральной шкалы. Мы получили

бы тот же результат, рассматривая отношение редуцированного и исходного расходов фотонов в интервале dx , равное той же спектральной чувствительности $\sigma(x)$, что следует из соотношения (20).

Заметим далее, что такие явления, как поглощение или отражение радиации, можно рассматривать в качестве простейших реакций приемников (поглощающих или отражающих тел), причем спектральная чувствительность в этих случаях совпадает соответственно со спектральными коэффициентами поглощения и отражения.

В других случаях спектральная чувствительность характеризует приемники, в которых происходят весьма сложные явления. Но все эти спектральные характеристики, обобщаемые понятием спектральной чувствительности, инвариантны к спектральным преобразованиям [Л. 289].

Спектральная чувствительность является функцией точки спектра и сохраняет неизменным свое значение в этой точке при любых преобразованиях спектральной шкалы. Если, например, спектральная чувствительность максимальна при длине волны λ_m , то в шкале волновых чисел она будет иметь максимум в точке с координатой $1/\lambda_m$.

Таким образом, максимум спектральной чувствительности остается в одной и той же точке спектра при всех спектральных преобразованиях, в то время как максимум спектральной плотности перемещается по спектру в зависимости от применяемой спектральной шкалы. Максимум спектральной плотности солнечного лучистого потока, например, находясь в зеленой части длинноволнового спектра, совмещается с максимумом спектральной чувствительности глаза, но в шкале волновых чисел оказывается в инфракрасной области, где эта чувствительность равна нулю.

Спектральная чувствительность сохраняет максимум и в шкалах, в которых спектр принимает равноэнергетическую или равнофотонную формы, лишены максимумов (§ 3). Отсюда ясно, что нельзя усматривать приспособленность приемников к спектрам в совмещении максимумов спектральной чувствительности и какой-либо спектральной плотности.

Введем общее выражение коэффициента полезного

действия радиации применительно к некоторой спектральной координате x :

$$\eta = \frac{\int \sigma(x) h(x) dx}{\int h(x) dx},$$

где через $h(x)$ обозначена спектральная плотность лучистого потока или расхода фотонов. Интегрирование выполняется здесь по всей шкале x , причем численные значения η при $h(x) = p(x)$ и $h(x) = n(x)$ различны, но для данного вида функции $h(x)$ к. п. д. определяется видом функции $\sigma(x)$. Согласно выясненному выше, к. п. д. η должен быть инвариантным к спектральным преобразованиям. Если, следовательно, спектральная чувствительность $\sigma(x)$ обеспечивает высокое значение к. п. д. η , вычисляемого в некоторой шкале x , то мы найдем такое же значение к. п. д. радиации в любой другой спектральной шкале.

Таким образом, приспособленность приемника к спектру действующей на него радиации или соответствие спектральных характеристик приемника и радиации выражается в обеспечении достаточно высокого значения к. п. д. η , которое не зависит от спектральной шкалы [Л. 380]. При этом ряд других факторов может определять то обстоятельство, что чувствительность приемника отличается от нуля в определенной области спектра.

Сложнейшим приемником лучистой энергии является зрительный анализатор человека, состоящий из глаза, проводников зрительного возбуждения и зрительных центров в коре больших полушарий головного мозга. Для сокращения будем называть его далее глазом. Его реакция различна в дневных, ночных и промежуточных условиях [Л. 389]. Относительную спектральную чувствительность глаза называют относительной видностью и обозначают через K_λ . Основной реакцией глаза естественно считать ту, которая имеет место в условиях дневного зрения. Соответствующие значения относительной видности рассматриваются (как было принято в 1924 г. Международной комиссией по освещению — МКО) в качестве значений спектральной чувствительности глаза в дневных условиях. Эти стандартизованные значения K_λ приведены в табл. 1.

Относительная видимость (по ОСТ 8485)

λ , нм	K_λ	λ , нм	K_λ	λ , нм	K_λ	λ , нм	K_λ
380	0,00004	490	0,208	580	0,870	680	0,017
390	0,00012	500	0,323	590	0,757	690	0,0082
400	0,0004	510	0,503	600	0,631	700	0,0041
410	0,0012	520	0,710	610	0,503	710	0,0021
420	0,0040	530	0,862	620	0,381	720	0,00105
430	0,0116	540	0,954	630	0,265	730	0,00052
440	0,023	550	0,995	640	0,175	740	0,00025
450	0,038	555	1,0002	650	0,107	750	0,00012
460	0,060	560	0,995	660	0,061	760	0,00006
470	0,091	570	0,952	670	0,032	770	0,00003
480	0,139						

Примечание. В ОСТ 8485 даны значения K_λ через 1 нм. Значение K_λ при $\lambda = 555$ нм получено параболическим интерполированием, вследствие чего несколько превышает единицу.

Не касаясь выясненных С. И. Вавиловым [Л. 279] причин того, что глаз чувствителен к области спектра, находящейся между инфракрасными и ультрафиолетовыми лучами, остановимся на объяснении вида функции K_λ .

Известно, что кривая относительной видности близка к средней кривой спектральной плотности солнечного излучения, рассеиваемого зелеными растениями, в шкале длин волн [Л. 132]. Такое совпадение обеспечивает высокое значение к. п. д. η , оценивающего выгодность спектра для воздействия на глаз, одинаковое во всех спектральных шкалах. Спектральная чувствительность глаза такова, что обеспечивает близкое к единице значение к. п. д. солнечной радиации, рассеянной зеленой растительностью. Это достигнуто в процессе длительной эволюции среди зеленых растений.

Возможность построения шкалы, в которой кривая спектральной плотности будет иметь любой заданный вид (§ 3), показывает, что для всякой радиации имеется шкала, в которой эта кривая симметрична относительно центра интервала существования спектра. Такой же симметрией должна тогда обладать и кривая спектральной чувствительности, обеспечивающей близкое к единице

значение к. п. д. η . Следовательно, в этом случае максимумы обеих кривых должны совпадать. Совпадение максимумов спектральной плотности лучистого потока Солнца, рассеянного растительностью, и относительной видности и является следствием указанной симметрии, приблизительно присущей рассеянной растительностью солнечной радиации в шкале длин волн. Оно обусловлено, таким образом, приспособленностью спектральной чувствительности глаза к спектру рассеянной зелеными растениями радиации Солнца — приспособленностью, обеспечивающей высокий к. п. д. этой радиации [Л. 112].

Редуцированный поток, связанный с основной реакцией глаза, называют световым потоком.

Обозначая световой поток через F , имеем:

$$F = k \int K_{\lambda} p_{\lambda} d\lambda. \quad (31)$$

В соответствии с этим «световой поток есть расход лучистой энергии, определяемый по световому ощущению, которое он производит» — определение МКО, данное в 1921 г.¹

Единица светового потока — люмен — находится с ваттом в таком соотношении, что для получения светового потока в люменах следует положить в (31)

$$k = 683 \text{ лм/вт},$$

если спектральная интенсивность выражена в вт/мкм .

Отдача радиации для глаза носит название световой отдачи и выражается в люменах на ватт.

Из других редуцированных потоков упомянем бактерицидный и эритемный [Л. 310].

Бактерицидным называют лучистый поток, оцененный по его способности убивать бактерии. 1 вт лучистого потока при длине волны 0,254 мкм дает единицу бактерицидного потока — бакт.

Лучистый поток, оцененный по его способности вызывать эритему на коже человека, называют эритемным потоком. Его единицу — эр — дает 1 вт лучистого потока при $\lambda = 0,38 \text{ мкм}$.

¹ В 1951 г. МКО дала новое определение, согласно которому световой поток — «отличительная величина потока излучения, выражающая его способность производить световое ощущение, оцениваемое по значениям относительной видности. . .» [Л. 223].

Теперь предложено определять световой поток как величину, оценивающую лучистый поток по действию радиации на линейный селективный приемник, спектральная чувствительность которого соответствует табл. 1.

Произведение редуцированного потока на время можно рассматривать как редуцированную энергию. Поэтому к ней применим закон сохранения энергии, которому подчинена лучистая энергия. Имеет место, следовательно, принцип сохранения всякого редуцированного потока [Л. 127].

§ 6. Световые величины и основные соотношения между ними

Для описания распределения светового потока в пространстве служит система световых величин.

Положим, что световой поток F падает на поверхность s . На элемент ds , взятый где-либо на этой поверхности, приходится малая часть dF потока F . Отношение потока к поверхности, на которую он падает, представляет поверхностную плотность падающего светового потока, называемую освещенностью и обозначаемую через E . Значение этой величины, вычисленное для площадки ds , называют освещенностью в точке, вокруг которой взята площадка:

$$E = \frac{dF}{ds}. \quad (32)$$

Если же вычислить ту же величину для всей поверхности s , то это будет средняя освещенность [Л. 400]:

$$E_{\text{cp}} = \frac{F}{s}.$$

Предположим теперь, что поверхность s излучает световой поток F . Отношение светового потока к площади светящейся поверхности будет поверхностной плотностью излучаемого светового потока, называемой светностью¹ и обозначаемой через R . Она может быть определена в различных точках излучающей поверхности:

$$R = \frac{dF}{ds} \quad (33)$$

¹ Некоторые авторы называют эту величину светимостью.

и как средняя:

$$R_{\text{ср}} = \frac{F}{s}.$$

Рассмотрим расходящийся пучок лучей точечного источника. Он может занимать телесный угол, доходящий до 4π . Внутри этого пучка возьмем некоторое направление, вокруг которого образуем телесный угол $d\omega$. В $d\omega$ будет распространяться световой поток dF — часть полного потока, даваемого источником, от которого идет рассматриваемый пучок лучей.

Отношение потока dF к телесному углу $d\omega$ представляет угловую плотность светового потока в данном направлении от источника. Эту величину обозначают через I и называют силой света:

$$I = \frac{dF}{d\omega}. \quad (34)$$

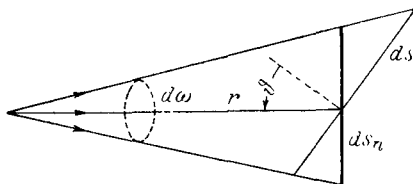


Рис. 10.

Если же составить такое же отношение, взяв световой поток F , излучаемый в сколь угодно большом телесном угле ω , то будет получено среднее значение силы света в пределах этого угла:

$$I_{\text{ср}} = \frac{F}{\omega}.$$

Значения силы света в разных направлениях внутри телесного угла ω могут быть различными и не равными среднему.

Через одну из точек луча, около которого был образован уже рассмотренный телесный угол $d\omega$, проведем теперь две плоскости — одну перпендикулярно, другую наклонно к лучу (рис. 10). Телесный угол $d\omega$ вырежет на проведенных плоскостях площадки ds_n и ds . Вследствие малости телесного угла можно считать ds_n ортогональной проекцией ds на плоскость, перпендикулярную лучу. Обозначая через ϑ угол падения луча на наклонную плоскость, имеем:

$$ds_n = ds \cos \vartheta. \quad (35)$$

Поскольку обе площадки — сечения телесного угла $d\omega$, на них падает один и тот же поток dF . Поэтому освещенности перпендикулярной и наклонной плоскостей будут соответственно:

$$E_n = \frac{dF}{ds_n};$$

$$E = \frac{dF}{ds};$$

первую из них называют нормальной освещенностью.

Подставляя в выражение E значения dF и ds_n , находим:

$$E = E_n \cos \vartheta; \tag{36}$$

это данное Ламбертом [Л. 12] выражение закона наклона, или закона косинуса: освещенность пропорциональна косинусу угла падения луча. Таким образом, освещенность уменьшается с увеличением наклона падающего луча, на что ранее указал Леонардо да Винчи [Л. 6].

Заметим теперь, что, согласно (1),

$$d\omega = \frac{ds_n}{r^2},$$

где r — расстояние от источника до рассматриваемой точки на пути луча. С другой стороны, если сила света в направлении луча равна I , то

$$dF = Id\omega;$$

тогда

$$E_n = \frac{I}{r^2}; \tag{37}$$

это — выражение установленного Кеплером [Л. 3] закона квадратов расстояния: освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния от точечного источника.

Подставляя (37) в формулу (36), получаем выражение освещенности произвольной плоскости через силу света:

$$E = \frac{I \cos \vartheta}{r^2}, \tag{38}$$

объединяющее законы наклона и квадратов расстояния.

Рассмотрим более общий случай астигматического пучка, характеризуемого расположением лучей в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях: меридиональной и сагиттальной. Лучи, принадлежащие каждой из этих плоскостей, образуют узкий веер, ширина которого изменяется пропорционально расстоянию от его вершины (фокуса). Взяв некоторую точку P на пути луча, обозначим ее расстояние от вершины S веера лучей сагиттальной плоскости через r_c , а расстояние от вершины M веера лучей меридиональной плоскости через r_m (рис. 11). Площадь нормального сечения астигматического пучка в точке P пропорциональна, как указал Бугер,

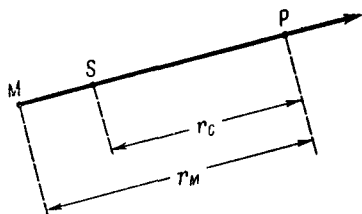


Рис. 11.

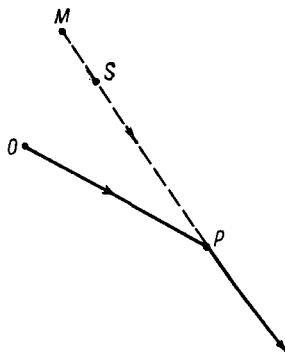


Рис. 12.

произведению ширины одного веера на ширину другого, т. е. произведению расстояний r_c и r_m . Поэтому нормальная освещенность, производимая астигматическим пучком, имеющим силу света I_a ,

$$E_{na} = \frac{I_a}{r_c r_m}. \quad (39)$$

В частном случае, когда $r_c = r_m$, т. е. пучок становится гомоцентрическим, из последнего соотношения, установленного Бугером [Л. 11], следует закон квадратов расстояния.

Сила света астигматического пучка может быть найдена из следующих соображений. Положим, что через точку P (рис. 12) проходит поверхность раздела двух сред. Гомоцентрический пучок, имеющий силу света I_1 , и световой поток dF , приходящий в эту точку из источника O , находящегося на расстоянии $r = OP$,

становится астигматическим. Нормальные освещенности, производимые в точке P гомоцентрическим и астигматическим пучками, выражаются формулами (37) и (39). Вместе с тем

$$E_n = \frac{dF}{ds_1};$$

$$E_{na} = \chi \frac{dF}{ds_2},$$

где dF — световой поток гомоцентрического пучка, ds_1 и ds_2 — нормальные сечения гомоцентрического и астигматического пучков в точке P , а χ — коэффициент изменения (§ 4), определяемый по (24), если астигматический пучок отраженный, и по (25), если он преломленный.

Исключая из последних выражений поток dF , имеем:

$$\chi E_n ds_1 = E_{na} ds_2,$$

откуда, после подстановки (37) и (39), находим силу света астигматического пучка:

$$I_2 = \chi \frac{r_1 r_2}{r^2} \cdot \frac{ds_1}{ds_2} I_1,$$

или

$$I_2 = \chi \frac{r_1 r_2}{r^2} \cdot \frac{\cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_1} I_1, \quad (40)$$

где ϑ_1 — угол падения гомоцентрического пучка на поверхность раздела;

ϑ_2 — угол, составляемый нормалью к поверхности раздела в точке P с осью астигматического пучка.

При вычислении силы света преломленного луча ϑ_2 — угол преломления. Для отраженного луча угол отражения $\vartheta_2 = \vartheta_1$, и из формулы (40), если пренебречь потерями, приняв $\chi \approx 1$, получается соотношение, выведенное Бугером [Л. 11]. При отражении от плоской поверхности раздела $r_1 = r_2 = r$, и из (40) следует, что

$$I_2 = \rho I_1,$$

где ρ — коэффициент отражения.

Чтобы характеризовать любой элементарный пучок лучей, служит понятие яркости, определяемое, по

Гершуну [Л. 217], как отношение светового потока пучка к потоку вектора телесного угла, заполняемого пучком. Таким образом, яркость

$$B = \frac{d^2F}{dG^2}. \quad (41)$$

Эта формула соответствует определению яркости, данному Бугером [Л. 11], согласно которому она «выражает лишь большую или меньшую сгущенность лучей, независимо от их общего количества», и пригодна как для сходящихся, так и для расходящихся пучков. Принимая во внимание выражение (3), следует определить

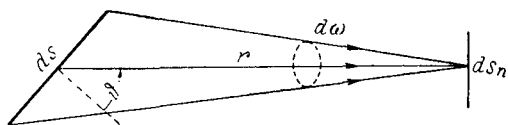


Рис. 13.

яркость как поверхностно-угловую плотность светового потока.

Рассмотрим создаваемую лучом нормальную освещенность dE_n , заменяя луч пучком, сходящимся в точке его падения на взятую площадку (рис. 13). Поток

$$d^2F = dE_n ds_n.$$

Подставляя последнее выражение в (41) и принимая во внимание (3), находим:

$$B = \frac{dE_n}{d\omega}. \quad (42)$$

Эту формулу можно рассматривать как определение яркости сходящегося пучка.

Пусть сходящийся пучок, занимающий телесный угол $d\omega$ и характеризуемый яркостью B , идет с произвольно расположенной излучающей площадки ds (рис. 13). Найдем силу света точечного источника, заменяющего эту площадку. Угол излучения, т. е. угол между направлением пучка и нормалью к излучающей площадке, обозначим ϑ . Освещенность площадки ds_n , по (42),

$$dE_n = B d\omega; \quad (43)$$

с другой стороны, заменяя площадку ds точечным источником, имеем:

$$dE_{\kappa} = \frac{dI}{r^2},$$

где dI — сила света, характеризующая расходящийся пучок, идущий из заменяющего ds точечного источника на ds_n ;

r — расстояние между точечным источником и ds_n .

Приравнивая теперь правые части двух выражений dE_n , получаем возможность вычислить силу света точечного источника, заменяющего излучающую площадку, или расходящегося пучка, заменяющего сходящийся:

$$dI = Br^2 d\omega.$$

Подставляя в предыдущее уравнение выражение $d\omega$ по (1), находим:

$$dI = B ds \cos \vartheta.$$

Точечный источник с такой силой света в рассматриваемом направлении будет создавать такие же освещенности, как и площадка ds . Решением этой задачи установлена связь между силой света и яркостью, которая может быть написана еще так:

$$B = \frac{dI}{ds \cos \vartheta}, \quad (44)$$

т. е. яркость площадки в некотором направлении равна отношению силы света заменяющего ее точечного источника в том же направлении к площади ее проекции на плоскость, перпендикулярную этому направлению. Это — третье определение яркости, которое также дал Бугер [Л. 11], относящееся к яркости расходящегося пучка лучей или посылающей его площадки. Эти яркости совпадают в пустоте или в среде, влиянием которой можно пренебречь, так как яркость площадки в некотором направлении равна в таких условиях яркости посылаемого ею в этом направлении луча.

Отношение силы света к площади излучающего элемента, входящее в (44), представляющее силу света, получаемую с единицы излучающей поверхности, на-

зывают удельной силой света; обозначим ее через J :

$$J = \frac{dI}{ds}. \quad (45)$$

Эту величину ввел П. М. Тиходеев. Она, как и яркость, представляет поверхностно-угловую плотность светового потока, но характеризует расходящийся пучок. Из (44) и (45) следует соотношение между этими двумя величинами:

$$J = B \cos \vartheta, \quad (45)$$

где ϑ — угол излучения.

Рассмотрим изменение яркости элементарного пучка лучей на гладкой поверхности раздела сред с показателями преломления n_1 и n_2 . Обозначая через B и dG с индексами 1 и 2 яркости и потоки вектора телесного угла в рассматриваемых средах, имеем, согласно (41):

$$B_1 = \frac{dF}{dG_1},$$

$$B_2 = \chi \frac{dF}{dG_2},$$

где χ — коэффициент изменения.

Из этих соотношений следует, что

$$B_2 = \chi B_1 \frac{dG_1}{dG_2},$$

или, на основании инварианта Гершуна (10),

$$B_2 = \chi B_1 \frac{n_2^2}{n_1^2}. \quad (47)$$

С последним выражением, подтвержденным экспериментально [Л. 220], согласуется выведенное выше соотношение (40) сил света в средах с показателями преломления n_1 и n_2 . Это легко доказать с помощью теоремы Штраубеля. Действительно, из (37) и (42) находим, что телесный угол $d\omega_1$, занимаемый падающим на поверхность раздела гомоцентрическим пучком, связан с силой света dI_1 и яркостью B_1 этого пучка соотношением

$$d\omega_1 = \frac{dI_1}{B_1 r^2}.$$

Принимая же во внимание (39), найдем зависимость телесного угла $d\omega_2$, занимаемого астигматическим пучком, от силы света dI_2 и яркости B_2 этого пучка:

$$d\omega_2 = \frac{dI_2}{B_2 r c r_M}.$$

Подставляя эти выражения телесных углов $d\omega_1$ и $d\omega_2$ в (9), имеем:

$$n_1^2 \frac{dI_1}{B_1 r^2} ds_1 = n_2^2 \frac{dI_2}{B_2 r c r_M} ds_2.$$

Отсюда следует, что силы света dI_1 и dI_2 связаны, как I_1 и I_2 в (40) при условии (47), и, наоборот, последняя зависимость между яркостями B_1 и B_2 имеет место при указанной связи сил света dI_1 и dI_2 .

В случае отражения $n_1 = n_2$, и из (47) следует, что

$$B_2 = \rho B_1.$$

Соотношение (47) без учета потерь, т. е. при $\chi = 1$, было получено Клаузиусом [Л. 29].

В табл. 2 приведены единицы, применяемые для измерения рассмотренных световых величин.

Мун и Спенсер предложили новую систему световых величин и единиц, построенную на принципах, не получивших общего признания, хотя и представляющих некоторый интерес [Л. 256].

Суммируя нормальные освещенности в некоторой точке по всем направлениям в пределах телесного угла

Таблица 2

Некоторые световые единицы

Величина	Название единицы	Связь с другими единицами
Световой поток Освещенность	Люмен (лм)	1 св·стер
	Люкс (лк)	1 лм/м ²
	Фут-свеча* (f.-с.)	1 лм на кв. фут = = 10,764 лк
Сила света Яркость	Свеча (св)	1 лм/стер
	Нит (нт)	1 св/м ² или 1 лк/стер
	Стильб (сб)**	10 ⁴ нт
Удельная сила света	—	1 св/см ²

* Применяется в странах английского языка.

** В систему СИ не входит.

4π, получим, согласно (43), введенную Вебером величину, называемую пространственной освещенностью [Л. 94]:

$$E_{\circ} = \int_{4\pi} B d\omega. \quad (48)$$

Пространственная освещенность характеризует среднюю яркость вокруг данной точки [Л. 217, 240].

Предложены и другие величины для возможно более адекватного описания условий освещения [Л. 150, 154, 176, 211]. Давно начавшиеся [Л. 48] попытки введения таких величин все продолжают [Л. 362, 375]. Это свидетельствует о том, что они еще не удовлетворяют запросам практики.

Вводя производные световых величин, можно, в случае надобности, рассматривать с их помощью распределение этих величин в сплошном спектре так же, как это сделано для лучистого потока (§ 3). Таким образом получается ряд световых величин, называемых спектральными плотностями [Л. 289]. Например, спектральная плотность освещенности в длинноволновой спектральной шкале

$$\frac{dE}{d\lambda} = \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial \lambda}.$$

Всякий луч может быть разложен на поляризованные составляющие, т. е. на несколько поляризованных лучей, совмещенных в пространстве. Лучистый поток и все другие величины, характеризующие луч, при таком разложении распределяются между составляющими. Сумма значений каждой величины, взятая для всех составляющих, должна быть равна, в силу закона сохранения энергии, значению той же величины для образуемого этими составляющими луча [Л. 120].

§ 7. Лучистые величины

Для описания распределения лучистого потока в пространстве служит система лучистых величин¹, в которой лучистый поток занимает такое же место, какое световой поток имеет в системе световых величин. Таким образом, если в системе световых величин заменить световой поток лучистым, то получаются

¹ Было бы правильнее, как указывал В. А. Зеленков, называть эти величины лучевыми.

лучистые величины, во всем остальном подобные световым.

Первой по времени была подробно разработана и получила общее признание в науке и технике система световых величин. Поэтому, когда выявилась потребность в подобных же величинах, описывающих распределение лучистого потока, было предложено [Л. 120, 204, 275] применять для них названия световых величин с прилагательным «энергетическая». Такая терминология получила широкое распространение. Ее преимущество — легкость понимания терминов по аналогии с входящими в них названиями световых величин. Но ее применение практически неудобно из-за необходимости пользоваться длинными терминами, состоящими не менее чем из двух слов. В связи с этим для лучистых величин были предложены также особые краткие названия [Л. 308]. В табл. 3 сопоставлены те и другие названия некоторых лучистых величин.

Таблица 3

Некоторые лучистые величины

Термины, содержащие названия аналогичных световых величин		Специальные термины
Энергетическая	освещенность	Облученность
Энергетическая	светность	Излучательность
«	сила света	Сила излучения
«	яркость	Лучистость

Между лучистыми величинами существуют те же соотношения, какие имеют место между аналогичными световыми величинами. Эти соотношения легко получить из формул предыдущего параграфа, подставив в них лучистый поток, облученность, излучательность, силу излучения и лучистость на место соответственно светового потока, освещенности, светности, силы света и яркости.

Лучистые величины характеризуют энергетические процессы, изучаемые во многих областях науки и техники, имеющих дело с лучистой энергией. Сюда относятся оптика, астрофизика, геофизика, теплофизика, теплотехника, светотехника, инфракрасная техника, ге-

лиотехника, техника связи и т. д. В этих областях нет, однако, единой терминологии, так что одни и те же величины в них называют по-разному [Л. 357].

Подобно тому, как рассмотренные лучистые величины образованы из лучистого потока, можно построить ряд величин на основе расхода фотонов. Аналогичная светности, например, величина представляет собой расход фотонов, приходящийся на единицу площади излучающей поверхности. Все соотношения между такими величинами будут совпадать с аналогичными соотношениями для лучистых величин.

§ 8. Связь лучистых, световых и других редуцированных величин

Если условия применения приемника позволяют считать реакцию пропорциональной редуцированному потоку или определяемой его значением (§ 5), то редуцированный поток следует рассматривать и применять как основную величину, характеризующую радиацию. Таким образом, в зависимости от того, на какой приемник должна действовать радиация, ее оценивают тем или другим редуцированным потоком, вычисляемым или измеряемым сообразно спектральной чувствительности приемника. Имея в виду применение лучистой энергии для воздействия на какой-либо приемник, рассматривают поэтому не лучистый поток, даваемый источниками, распространяющийся в пространстве и падающий на освещаемые тела, а редуцированный поток.

Отсюда возникает надобность изучения пространственного и спектрального распределения различных редуцированных потоков. С этой целью вводят величины, характеризующие распределение редуцированных потоков, подобные введенным в § 6 для светового потока. Таким образом получается ряд систем редуцированных величин. Для них употребляются особые названия и единицы [Л. 177, 308].

Спектральная редуцированная плотность связана со спектральной плотностью лучистого потока через спектральную чувствительность.

Редуцированные величины для сложного спектра определяются формулами, аналогичными (30).

В каждой системе редуцированных величин может

быть введен вектор, аналогичный вектору радиации, потоком которого является редуцированный поток. Как и вектор радиации, все эти векторы могут быть разложены по спектру. В системе световых величин такой вектор называют световым.

. Когда лучистый поток изменяется при неизменном распределении энергии в спектре, все редуцированные потоки, применимые в данных условиях, изменяются пропорционально лучистому и пропорционально, следовательно, один другому, в частности световому потоку, как видно из (30). Отсюда следует, что по изменению

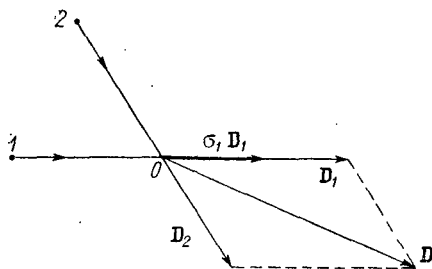


Рис. 14.

каждого из рассматриваемых потоков — лучистого и редуцированных — можно в таком случае судить об изменении всех других, или реакцией какого-либо одного приемника измерять реакцию любого другого, а также лучистый поток. Это невозможно, однако, для избирательных приемников, если про-

исходит изменение распределения энергии в спектре, так как тогда изменение различных редуцированных потоков будет непропорциональным.

При наличии одного источника, аналогичные редуцированные (например, световые) и лучистые величины находятся в одном и том же соотношении, определяемом отдачей. Дело обстоит иначе при наличии разных по спектру источников. Рассмотрим луч с длиной волны λ_1 , идущий из точки 1 (рис. 14). В точке O , взятой на пути этого луча, существует вектор радиации D_1 . Редуцируя последний, следует умножить его на σ_1 — спектральную чувствительность при длине волны λ_1 . Поток вектора $\sigma_1 D_1$ будет равен редуцированному потоку. Положим теперь, что в ту же точку O приходит другой луч, с длиной волны λ_2 , из точки 2, создающий в точке O вектор радиации D_2 , но спектральная чувствительность приемника для длины волны λ_2 равна нулю. В результате действия обоих лучей в точке O будет

результатирующий вектор радиации \mathbf{D} , редуцированный же поток будет зависеть от вектора $\sigma_1 \mathbf{D}_1$.

Как видно из этого примера, вектор, определяющий редуцированный поток, в частности световой вектор, может не совпадать с вектором радиации не только по величине, но и по направлению [Л. 233, 274]. Нетрудно, однако, убедиться в том, что для неизбирательных приемников эти векторы должны совпадать по направлению и величине; для избирательных приемников совпадение векторов по направлению будет только в том случае, когда спектральный состав лучей не зависит от направления, а совпадение по величине, — когда все лучи имеют одну и ту же длину волны λ_m , при которой $\sigma_\lambda = 1$ (говоря о совпадении векторов по величине, следует, конечно, полагать, что единицы лучистого и редуцированного потоков одинаковы, т. е. $k=1$).

Методы теоретической фотометрии достигли наибольшего совершенства в астрономии и в светотехнике. Это объясняется тем, что их разработка была начата там раньше, чем в других областях, вследствие чего своевременно выработалась ясная и удобная система световых величин, с терминологией, не допускающей смешения понятий. В некоторых других областях, в частности в теплотехнике, отсутствует общеупотребительная система величин и нет четкой терминологии. Словом «интенсивность», например, разные авторы называют совсем различные величины. Этим объясняется исключительное применение световых величин в дальнейшем изложении, в котором, таким образом, рассматривается распределение светового потока. Получаемые при этом математические соотношения не изменятся, если вместо световых величин в них подставить аналогичные величины другой редуцированной системы или же лучистые. Следует, однако, проявлять осторожность при вычислении лучистых или других редуцированных величин по рассчитанным световым величинам. Именно, необходимо различать рассмотренные выше случаи, когда все источники имеют одинаковый спектральный состав и когда они различны по спектру.

Коэффициенты отражения, пропускания и поглощения любого редуцированного потока составляются так же, как они были составлены выше для лучистого

потока. Численные значения их различны в зависимости от того, какой поток рассматривается. В случае светового потока их называют световыми коэффициентами отражения, пропускания и поглощения [Л. 309].

ГЛАВА ВТОРАЯ

ГЛАВНЫЕ МЕТОДЫ

§ 9. Основные характеристики источников света

Точечный источник, рассмотренный в § 1, является вершиной расходящихся пучков лучей, идущих от него в окружающее пространство. Поэтому действие его в различных направлениях характеризуется соответственными значениями силы света. Примем одно из таких направлений за основное. В какой-либо плоскости, проходящей через основное направление, будем характеризовать всякое другое направление углом ϑ , составляемым им с основным (рис. 15). Положение плоскости, в которой измеряется угол ϑ , может быть определено углом α , составляемым ею с одной из других таких же плоскостей, принимаемой за начальную. Линию основного направления назовем фотометрической осью.

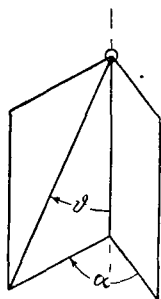


Рис. 15.

Угол ϑ называют углом излучения.

Направление всякого луча, посылаемого рассматриваемым источником, теперь характеризуется углами α и ϑ . Силу света, зависящую от направления, можно рассматривать как функцию этих углов. Существуют источники, у которых можно найти такое направление фотометрической оси, при котором сила света оказывается зависящей только от угла ϑ , т. е. зависимость ее от этого угла получается одинаковой во всех плоскостях, проходящих через ось. Такие источники называют симметричными. Источники же, у которых сила света при всяком направлении оси зависит от обоих углов, называют несимметричными.

Построив график зависимости силы света от угла ϑ , получим кривую силы света (называемую продольной) точечного источника. Очевидно, что симметричный источник исчерпывающим образом характеризуется заданием значений силы света в пределах изменения угла ϑ от 0 до 180° или кривой силы света, построенной в тех же пределах, т. е. в полуплоскости, проходящей через фотометрическую ось. Для несимметричного источника этого недостаточно: должен быть известен ряд кривых для разных полуплоскостей, положение которых характеризуется различными значениями угла α .

Можно считать, что изменение мощности источника не влияет на вид кривой силы света. Поэтому сила света в любом направлении пропорциональна полному световому потоку точечного источника.

Рассмотрим отдельно точечный источник, заменяющий площадку или элемент излучающей поверхности. За фотометрическую ось в этом случае естественно принять направление нормали. Такой точечный источник будет отличаться той особенностью, что значения силы света при $\vartheta > 90^\circ$ равны нулю — площадка излучает только по одну сторону своей плоскости. Сила света здесь пропорциональна световому потоку dF площадки, равному произведению светности на площадь:

$$dF = R ds.$$

Поэтому удельная сила света будет пропорциональна только светности.

Кривая, изображающая зависимость удельной силы света от угла ϑ , будет, очевидно, подобна кривой силы света, но значения удельной силы света не зависят от размеров площадки. Кривая удельной силы света характеризует излучающую поверхность, изменяясь лишь с изменением светности. В некоторых случаях удобно строить кривую яркости, представляющую зависимость яркости от угла ϑ .

Иногда рассматривают еще поверхность, служащую геометрическим местом концов отрезков, пропорциональных силам света и отложенных от источника в направлении соответствующих лучей. Тело, как бы ограниченное такой поверхностью, можно назвать фотометрическим. У симметричных источников это тело — тело вращения около фотометрической оси.

Кривую силы света всякого точечного источника, а также кривые силы и удельной силы света излучающей площадки можно представить в форме, не зависящей от мощности источника или светности площадки. Для этого достаточно разделить значения силы и удельной силы света в каждом направлении на значение соответствующей величины в каком-либо одном, раз навсегда выбранном направлении. В качестве последнего в большинстве случаев удобно взять направление $\vartheta = 0$. Тогда получится кривая относительных значений силы света, не зависящая от мощности источника и одинаковая для силы и удельной силы света в случае излучающей площадки.

Функцию, выражающую зависимость от направления относительных значений связанной с направлением фотометрической величины, называют индикатрисой. В дальнейшем этим термином обозначается только индикатриса силы света:

$$f(\vartheta) = \frac{I_{\vartheta}}{I_0} \quad (49)$$

где значками ϑ и 0 отмечены значения величин в направлениях ϑ и 0° .

Если $I_0 = 0$, то можно взять отношение сил света I_{ϑ} к силе света в каком-либо другом удобном направлении. Функция f_{ϑ} выражает закон излучения, которому следует источник.

По индикатрисе может быть вычислен полный световой поток точечного источника. Из (49) сила света в каком-либо направлении под углом ϑ

$$I_{\vartheta} = I_0 f(\vartheta). \quad (50)$$

Световой поток расходящегося пучка, характеризуемого этой силой света и занимающего телесный угол $d\omega$,

$$dF = I_0 f(\vartheta) d\omega. \quad (51)$$

Полный поток источника

$$F = I_0 \int f(\vartheta) d\omega. \quad (52)$$

Этот интеграл вычисляется в пределах телесного угла, равного 4π . Способы его вычисления будут рассмотрены подробно в главе третьей.

Введем теперь отношение полного светового потока F точечного источника к силе света I_0 , даваемой им в направлении, принятом за основное:

$$\Omega = \int f(\vartheta) d\omega. \quad (53)$$

Величина Ω является, очевидно, телесным углом. Именно, Ω — телесный угол, в котором распространялся бы весь поток F источника, если бы сила света была равна I_0 по всем направлениям внутри этого угла; назовем его эквивалентным телесным углом¹. Тогда сила света в любом направлении

$$I_\vartheta = \frac{F}{\Omega} f(\vartheta). \quad (54)$$

У несимметричных источников значение $f(\vartheta)$ должно быть определено с учетом положения плоскости, проходящей через фотометрическую ось, в которой идет рассматриваемый луч, и будет функцией обоих углов — $f(\alpha, \vartheta)$.

Для излучающей поверхности Ω есть отношение светового потока dF ее элемента ds к силе света dI_0 этого элемента в направлении нормали. Следовательно,

$$dF = \Omega dI_0. \quad (55)$$

Отсюда, вводя светность R , имеем:

$$\Omega = R \frac{ds}{dI_0}, \quad (56)$$

или

$$\Omega = \frac{R}{B_0}, \quad (57)$$

где B_0 — яркость в направлении нормали.

Таким образом, для излучающей поверхности эквивалентный телесный угол может быть определен еще как отношение светности к яркости в направлении нормали.

Полный лучистый поток F , даваемый поверхностью s , свойства которой, т. е. $f(\vartheta)$ и R , во всех точках одинаковы, равен произведению Rs , т. е.

$$F = \Omega B_0 s. \quad (58)$$

¹ Эту величину называют также коэффициентом формы кривой силы света.

Иногда функцию, представляющую зависимость силы света от направления, нормируют другими способами. Один из таких способов состоит в том, что значения силы света во всех направлениях делят на полный поток источника, т. е. вычисляют для каждого направления силу света, приходящуюся на единицу полного потока. Зависимость этой величины от направления заменяет индикатрису:

$$f_F(\vartheta) = \frac{I_{\vartheta}}{F}.$$

В другом способе вычисляют сначала среднюю сферическую силу света:

$$I_{\ominus} = \frac{F}{4\pi}.$$

Это — сила света, которую давал бы при том же полном потоке источник, у которого она не зависит от направления. Затем составляют отношение сил света в разных направлениях к средней сферической, заменяя индикатрису зависимостью этого отношения от направления:

$$f_I(\vartheta) = \frac{I_{\vartheta}}{I_{\ominus}}.$$

Как видно, все эти функции связаны следующим образом:

$$f(\vartheta) = \Omega f_F(\vartheta) = \frac{\Omega}{4\pi} f_I(\vartheta);$$

отсюда

$$\int f_F(\vartheta) d\omega = 1;$$

$$\int f_I(\vartheta) d\omega = 4\pi,$$

где интегрирование выполняется в пределах телесного угла 4π .

Рассматривая лучи, идущие от тела после отражения или прохождения света через него, иногда удобно считать это тело источником. Такие источники называют вторичными, в отличие от первичных, в которых происходит возникновение лучистой энергии. Индикатрисы вторичных источников зависят, естественно, от условий их освещения, т. е. от направления, числа и яркости падающих на них лучей.

В дальнейшем всякий точечный источник и всякая излучающая поверхность характеризуются индикатрисами. Кроме того, для точечных источников должен быть задан световой поток, для излучающих же поверхностей — светность. По этим данным, относящимся к тому

или другому участку спектра или ко всему спектру, могут быть найдены все другие величины, характеризующие каждый источник в данном спектральном интервале или во всем спектре.

§ 10. Коэффициенты освещенности и связи

Рассмотрим излучающую поверхность s_1 и освещаемую s_2 . Пусть от элемента ds_1 к элементу ds_2 (см. рис. 6) идет сходящийся пучок, занимающий телесный угол $d\omega_1$ и имеющий силу света dI . Яркость этого пучка обозначим через B , угол излучения для него — через ϑ_1 ; тогда

$$B = \frac{dI}{ds_1 \cos \vartheta_1} = \frac{dI_0}{ds_1} \cdot \frac{f(\vartheta_1)}{\cos \vartheta_1} = B_0 \cdot \frac{f(\vartheta_1)}{\cos \vartheta_1},$$

откуда

$$B = \frac{R}{\Omega} \cdot \frac{f(\vartheta_1)}{\cos \vartheta_1}, \quad (59)$$

где dI_0 и B_0 — сила света и яркость элемента ds_1 в направлении нормали, а $f(\vartheta)$ и Ω — его индикатриса и эквивалентный телесный угол. Освещенность, производимая этим пучком в рассматриваемой точке освещаемой поверхности,

$$dE = \frac{R}{\Omega} \cdot \frac{\cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_1} f(\vartheta_1) d\omega_1, \quad (60)$$

где ϑ_2 — угол падения. Предполагая, что индикатриса и светность излучающей поверхности одинаковы во всех ее точках, найдем теперь освещенность, производимую этой поверхностью:

$$E = \frac{R}{\Omega} \int_{\omega_1} f(\vartheta_1) \frac{\cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_1} d\omega_1, \quad (61)$$

где ω_1 — телесный угол, занимаемый пучком, идущим от всей поверхности s_1 .

Отношение освещенности к светности излучающей поверхности называют коэффициентом освещенности [Л. 217]. Этот коэффициент обозначим через ε :

$$\varepsilon = \frac{E}{R}; \quad (62)$$

он — безразмерная величина.

Очевидно из (61), что для ds_2

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\Omega} \int_{\omega_1} f(\vartheta_1) \frac{\cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_1} d\omega_1. \quad (63)$$

Таким образом, коэффициент освещенности зависит от индикатрисы, а также от вида и расположения излучающей поверхности.

Если r — расстояние от ds_1 до ds_2 , то, согласно (1),

$$d\omega_1 = \frac{\cos \vartheta_1}{r^2} ds_1,$$

что, после подстановки в (63), дает другое выражение коэффициента освещенности:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\Omega} \int_{s_1} f(\vartheta_1) \frac{\cos \vartheta_2}{r^2} ds_1. \quad (64)$$

Вычислим световой поток F_{12} , падающий на поверхность s_2 от поверхности s_1 :

$$F_{12} = \int_{s_2} E ds_2,$$

т. е.

$$F_{12} = R \int_{s_2} \varepsilon_2 ds_2. \quad (65)$$

Поток F_{12} составляет некоторую долю ψ_{12} полного потока F_1 , даваемого излучающей поверхностью. Эту величину называют коэффициентом связи [Л. 203]¹:

$$\psi_{12} = \frac{F_{12}}{F_1}. \quad (66)$$

Коэффициент самосвязи — коэффициент связи поверхности с собой; для плоских и выпуклых поверхностей он равен нулю.

Приняв во внимание, что

$$F_1 = R s_1,$$

¹ В теплотехнике эту величину называют угловым коэффициентом или угловым отношением, а также фактором формы и коэффициентом облученности. Разные авторы пользуются различными названиями как для коэффициента связи, так и для коэффициента освещенности [Л. 354].

найдем из последних выражений:

$$\psi_{12} = \frac{1}{s_1} \int_{s_2} \varepsilon_2 ds_2. \quad (67)$$

Отсюда находим далее, что коэффициент освещенности поверхности s_2 от поверхности s_1

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial(\psi_{12}s_1)}{\partial s_2}. \quad (68)$$

Обозначая через φ_2 коэффициент связи элемента ds_1 с s_2 , имеем также:

$$\psi_{12} = \frac{1}{s_1} \frac{1}{\Omega} \int_{s_1} \varphi_2 ds_1, \quad (69)$$

где

$$\varphi_2 = \frac{1}{\Omega} \int_{\omega_2} f(\theta_1) d\omega_2, \quad (70)$$

если ω_2 — телесный угол, под которым поверхность s_2 видна из ds_1 .

Коэффициент связи зависит от индикатрисы, а также вида и взаимного расположения излучающей и освещаемой поверхностей. Наибольшее возможное его значение, очевидно, равно единице. Если светность в разных точках излучающей поверхности различна, то коэффициент связи может изменяться еще в зависимости от этого обстоятельства.

Коэффициенты освещенности и связи, будучи определены для тех условий, от которых они зависят, позволяют легко вычислять освещенности и потоки при различной мощности (т. е. различной светности) излучающей поверхности.

§ 11. Термодинамические условия. Законы Ламберта и Эйлера

Рассмотрим систему n поверхностей, образующих замкнутую фигуру, внутри которой одна из них, скажем k -я, излучает. Введя коэффициенты связи $\psi_{k1}, \psi_{k2}, \dots, \psi_{kk}, \dots, \psi_{kn}$ излучающей поверхности со всеми n

поверхностями, находим, что закон сохранения энергии требует условия:

$$\sum_{i=1}^n \psi_{ki} = 1, \quad (71)$$

которое является выражением принципа сохранения потока (§ 5). Это условие показывает, что поток, посылаемый каждой из рассматриваемых поверхностей, целиком попадает на нее и другие поверхности; его называют условием замкнутости.

Рассматривая замкнутую систему поверхностей в состоянии термодинамического равновесия, т. е. излучающих как абсолютно черные тела, находящиеся при одинаковой температуре, можно получить новые фотометрические соотношения [Л. 234]. При этом каждая поверхность посылает любой другой такой же лучистый поток, какой получает от нее, а так как спектральный состав излучения всех поверхностей одинаков, в указанном соотношении находятся и световые потоки.

Таким образом, если к рассматриваемой системе принадлежат площадки ds_1 и ds_2 , первая из которых посылает на вторую световой поток dF_{12} , а вторая на первую — поток dF_{21} , то

$$dF_{12} = dF_{21}.$$

Положим, что расстояние r между взятыми площадками достаточно велико, чтобы можно было рассматривать их как точечные источники. Пусть dI_1 и dI_2 — силы света первой площадки в направлении на вторую и второй в направлении на первую, а ϑ_1 и ϑ_2 — углы, составляемые нормальными к площадкам с соединяющим их лучом (см. рис. 6). Тогда световой поток

$$dF_{12} = \frac{dI_1}{r^2} \cos \vartheta_2 ds_2,$$

а

$$dF_{21} = \frac{dI_2}{r^2} \cos \vartheta_1 ds_1.$$

Приравнивая правые части этих выражений и деля обе части равенства на произведение $ds_1 ds_2$, находим, что

$$\frac{dI}{ds \cos \vartheta} = \text{const}, \quad (72)$$

ИЛИ

$$B = \text{const}, \quad (73)$$

т. е. яркость площадки не зависит от направления.

Из (72) непосредственно следует, что в рассматриваемом случае индикатриса

$$f(\vartheta) = \cos \vartheta. \quad (74)$$

Точечный источник, имеющий такую индикатрису, будем называть косинусным. Его эквивалентный телесный угол

$$\Omega = \int_{2\pi} \cos \vartheta d\omega. \quad (75)$$

Интеграл этот может быть вычислен из следующих геометрических соображений. ϑ — угол между осью телесного угла $d\omega$ и нормалью к излучающей площадке.

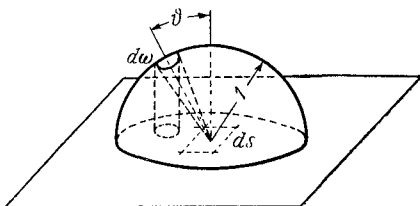


Рис. 16.

А так как ось угла $d\omega$ есть нормаль к сферическому элементу, измеряющему этот телесный угол, то подынтегральное выражение представляет, очевидно, проекцию такого элемента на плоскость излучающей площадки. Другими словами, это — проекция вырезанного телесным углом $d\omega$ элемента сферы единичного радиуса, имеющей центр в вершине телесного угла. Интеграл равен сумме таких проекций, т. е. проекции суммы сферических элементов или части сферы, соответствующей телесному углу 2π . Эта часть — полусфера, а ее проекция на плоскость площадки, проходящую через центр, равна π (рис. 16). Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\Omega = \pi. \quad (76)$$

Формулы (73) и (74) выражают закон Ламберта [Л. 12], вывод которого из условий термодинамического равновесия дал Фурье [Л. 19] и подробно исследовал Пуассон [Л. 24].

Из предыдущего следует, что по этому закону излучает абсолютно черное тело. Во многих других случаях закон Ламберта соблюдается с большей или меньшей

точностью, часто достаточной, однако, для практических расчетов. Это относится как к первичным источникам, так и к вторичным [Л. 81]. Сам Ламберт нашел свой закон из наблюдений, показывавших, как он полагал, что яркость солнечного диска, т. е. проекции светящегося шара, одинакова во всех его точках, чем опровергалось мнение Эйлера, полагавшего, что элемент поверхности такого шара дает силу света, одинаковую по всем направлениям [Л. 10]. Однако еще наблюдения Бугера [Л. 11] показали, что предположения, принятые Эйлером и впоследствии Ламбертом, не подтверждаются для небесных тел, для которых соотношение, названное в дальнейшем законом Ламберта, является лишь не всегда допустимым приближением.¹

В действительности, как заметил еще Гершель [Л. 21], излучает не элемент поверхности, а слой вещества, находящийся за ним. В случаях сильного поглощения собственного излучения или большой толщи излучающего вещества, элемент поверхности источника излучает приблизительно по закону Ламберта, при слабом же поглощении — приблизительно так, как считал Эйлер. Отступления от этих законов зависят от преломления, отражения и рассеяния на поверхности раздела излучающей и окружающей сред [Л. 58]. Поскольку поглощение зависит от длины волны, элемент поверхности может излучать по-разному в разных местах спектра. Газосветные лампы низкого давления, например, приближаются к закону Ламберта в резонансном излучении, тогда как распределение потока других линий их спектра происходит приблизительно по Эйлеру.

Таким образом, наряду с законом Ламберта в некоторых случаях применим закон Эйлера, когда индикатриса

$$f(\vartheta) = 1, \quad (77)$$

а эквивалентный телесный угол для элемента поверхности, излучающего по одну сторону,

$$\Omega = 2\pi. \quad (78)$$

¹ Мун и Спенсер ввели [Л. 264] величину гелиос, равную яркости луча, умноженной на π . Согласно (57), это — светность поверхности, излучающей с такой яркостью по закону Ламберта в пустоте.

Оба закона применимы при ограниченных условиях, а не универсальны, как полагали Эйлер для своего закона и Ламберт для своего.

При соблюдении закона Эйлера, сила света точечного источника не зависит от направления:

$$I = \text{const.} \quad (79)$$

Такой источник называют равномерным или изотропным. В этом случае эквивалентный телесный угол

$$\Omega = 4\pi. \quad (80)$$

Практически закон Ламберта имеет наиболее широкое применение, так как во многих расчетах принимают, что излучающие и рассеивающие свет поверхности достаточно точно ему подчиняются. В таких случаях применимы фотометрические соотношения, получаемые для поверхностей, находящихся в условиях термодинамического равновесия [Л. 207], при котором, как показал Фурье, соблюдается закон Ламберта, а светность всех поверхностей одинакова. Такие поверхности называют равнояркими.

Потоки F_k и F_i , излучаемые равнояркими поверхностями s_k и s_i , находятся в соотношении:

$$\frac{F_k}{F_i} = \frac{s_k}{s_i}. \quad (81)$$

Вместе с тем, поток, падающий с s_k на s_i ,

$$F_{ki} = \psi_{ki} F_k,$$

а поток, падающий с s_i на s_k ,

$$F_{ik} = \psi_{ik} F_i,$$

где ψ_{ki} и ψ_{ik} — коэффициенты связи s_k с s_i и s_i с s_k .

При термодинамическом равновесии

$$F_{ki} = F_{ik}, \quad (82)$$

откуда следует формула, которую дал Дурньон [Л. 129]:

$$\psi_{ki} s_k = \psi_{ik} s_i. \quad (83)$$

Уравнения (71), (82) и (83)¹ составляют основу

¹ В теплотехнике произведение $\psi_{ik} s_i$ называют взаимной поверхностью тел i и k .

термодинамического метода теоретической фотометрии, для решения некоторых задач которой достаточно их применения. Следует заметить, однако, что уравнение (82) и формула Дурньона применимы, в отличие от (71), только при точном (термодинамическое равновесие) или приближенном соблюдении закона Ламберта, причем (82) предполагает одинаковую светность обеих поверхностей. Тем не менее, уравнение (82) позволяет получать важные результаты, как, в частности, показано в дальнейшем.

§ 12. Отрицательные световые величины

Существуют явления, для изучения которых полезно рассматривать световые потоки разных знаков — положительные и отрицательные. Б. И. Степанов развил и применил эту идею, указав, что она имеет значение и в проблемах переноса лучистой энергии [Л. 352]. При этом, пользуясь отрицательным потоком, необходимо рассматривать и отрицательные значения всех других световых величин.

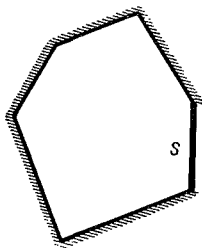


Рис. 17.

Чтобы ввести отрицательные световые величины в фотометрию, рассмотрим замкнутую систему излучающих поверхностей. В результате взаимодействия этих поверхностей каждая из них будет иметь некоторую яркость в любой своей точке и во всех направлениях. Пусть s — одна из таких поверхностей (рис. 17). Для упрощения дальнейших рассуждений предположим, что s — равнояркая поверхность. Имея некоторую яркость B , она участвует в освещении остальных поверхностей, яркости которых зависят, следовательно, от ее присутствия. Если удалить поверхность s , то в рассматриваемой системе поверхностей образуется окно, через которое свет будет частично выходить в окружающее пространство. В то же время световой поток, входящий через образовавшееся окно из окружающего пространства, может быть пренебрежимо малым. Тогда яркости всех поверхностей системы изменятся.

Рассматривая окно как одну из поверхностей, входя-

щих в состав замкнутой системы, можно принимать, что в описанном опыте яркость этой поверхности во всех ее точках и по всем направлениям равна нулю. Поэтому образование окна посредством удаления равнояркой поверхности, имеющей яркость B , должно оказать такое же влияние на остальные поверхности системы, какое получилось бы, если бы удаляемая поверхность, оставаясь на месте, начала бы дополнительно излучать с яркостью — B , одинаковой по всем направлениям.

Таким образом, принимая, что окно излучает как равнояркая поверхность отрицательной яркости, определяют его влияние на замкнутую систему поверхностей, в которой оно образовано. Этот метод применим, конечно, и в тех случаях, когда поверхность, удалением которой образовано окно, излучает по другим законам.

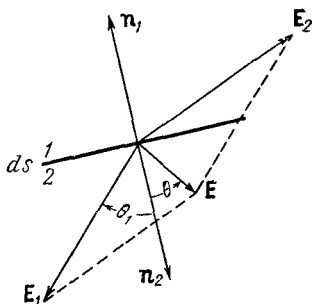


Рис. 18.

§ 13. Световой вектор

Так же как в § 2 было показано для вектора радиации, нетрудно видеть, что поток светового вектора \mathbf{E} через площадку ds , на обе стороны которой падают лучи, равен разности световых потоков dF_1 и dF_2 , падающих на стороны этой площадки, т. е. (рис. 18)

$$\mathbf{E}n_2 ds = dF_1 - dF_2. \quad (84)$$

Деля обе части этого равенства на ds , находим:

$$\mathbf{E}n_2 = E_1 - E_2, \quad (85)$$

где E_1 и E_2 — освещенности сторон площадки.

Таким образом, проекция светового вектора на нормаль к какой-либо площадке, проходящей через точку, к которой относится значение вектора, равна разности освещенностей сторон этой площадки.

Обозначая через θ острый угол между направлениями светового вектора и нормали к площадке (рис. 18), перепишем последнее соотношение так:

$$|\mathbf{E}| \cos \theta = E_1 - E_2.$$

Отсюда ясно, что разность освещенностей сторон площадки имеет наибольшее значение, когда эта площадка перпендикулярна световому вектору ($\theta=0$). Если же освещенности обеих сторон площадки одинаковы, то это означает, что световой вектор лежит в ее плоскости ($\theta = \frac{\pi}{2}$).

Чтобы найти с помощью светового вектора освещенность какой-либо стороны, например *I*, рассматриваемой площадки, необходимо исключить лучи, падающие на обратную сторону, т. е. принимать во внимание только

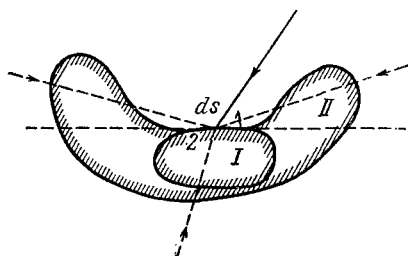


Рис. 19.

составляющую E_1 светового вектора (рис. 18). Тогда искомая освещенность

$$E_1 = |E_1| \cos \theta_1, \quad (86)$$

где θ_1 — острый угол между нормалью к площадке и направлением равнодействующего светового вектора лучей, падающих на сторону *I*.

Площадка ds может быть элементом поверхности непрозрачного тела, внесенного в пространство, где распространяется свет. Пока не было этого тела, в точке, где затем оказалась площадка ds , существовал вектор E . После появления тела часть лучей из числа пересекавшихся раньше в этой точке и создававших вектор E будет исключена.

Если поверхность тела выпуклая (*I* на рис. 19), то исключены будут все лучи, идущие из отделяемого плоскостью площадки ds полупространства, где находится это тело. Если поверхность вогнутая (*II* на рис. 19), то исключенными могут частично оказаться и лучи, идущие из другого полупространства. Исключаемые лучи проходили до появления тела занятую им часть пространства (на рис. 19 они показаны пунктиром); в случае вогнутой поверхности вместо них могут появиться лучи, отражаемые частями этой поверхности, возвышающимися над площадкой ds .

Таким образом, исключение части лучей, необходи-

мое для расчета освещенности некоторой площадки с помощью светового вектора, означает переход к новым условиям, возникающим в поле светового вектора при появлении тела, поверхности которого принадлежит эта площадка. Исключать нужно лучи, не пропускаемые таким телом.

Формула (86) представляет обобщенное Бурхардом [Л. 106] выражение закона наклона (36): освещенность пропорциональна косинусу угла между нормалью к освещаемой площадке и равнодействующим вектором, пока площадка, при повороте, остается освещенной одними и теми же лучами.

Закон наклона получается из формулы (86) в частном случае, когда на площадку падает только один луч. Заметим, что угол, косинусу которого пропорциональна освещенность площадки, есть угол между рассматриваемым положением площадки и тем, где ее освещенность от тех же самых лучей максимальна. В случае одного луча из (86) следует (если положить $\theta_1 = 0$), что

$$|E| = E_n, \quad (87)$$

т. е., что световой вектор луча равен по величине создаваемой этим лучом нормальной освещенности. Это позволяет выразить световой вектор также с помощью вектора $d\omega$ элементарного телесного угла (§ 1).

По (42), сходящийся пучок лучей, занимающий угол $d\omega$, создает в вершине этого угла световой вектор

$$dE = B d\omega, \quad (88)$$

где B — яркость пучка.

Результирующий световой вектор можно рассматривать на этом основании еще как геометрическую сумму нормальных освещенностей:

$$E = \int B d\omega, \quad (89)$$

где интегрировать нужно в пределах телесного угла, из которого приходят лучи, создающие E ; или

$$E = \sum \frac{I}{r^2} r, \quad (90)$$

где I — сила света источника, находящегося на расстоянии r от рассматриваемой точки поля.

При перемене знака яркости или силы света направление светового вектора изменяется, как видно, на прямо противоположное.

Если в некоторой области поля $B = \text{const}$ для всех лучей, то из (89)

$$E = B\omega, \quad (91)$$

где ω — вектор телесного угла, занимаемого лучами, создающими световой вектор E .

Световой поток через некоторую поверхность, находящуюся в рассматриваемой области, согласно (41),

$$F = BG, \quad (92)$$

где G — поток вектора телесного угла через ту же поверхность.

Рассмотренные свойства светового вектора дают возможность находить векторы отдельных лучей и их равнодействующие в каждой точке пространства, в котором происходит распространение света. Можно поэтому пользоваться представлениями, связанными с существующим в этом пространстве полем светового вектора, называемым световым полем, для изучения пространственного распределения светового потока. Надо, однако, иметь в виду, что знание этого поля, т. е. знание результирующего светового вектора в каждой точке пространства, не дает еще возможности вычислять освещенности во всех случаях. Для этого иногда необходимо, как уже выяснено, исключение части лучей. Кроме того, в некоторых случаях освещенности площадок, проходящих через какую-либо точку поля, могут оказаться различными при одном и том же результирующем векторе, в зависимости от могущих на нем не сказываться изменений отдельных лучей. Поэтому [Л. 233] постоянства светового вектора в каждой точке поля недостаточно для того, чтобы считать поле постоянным: в постоянном поле должны быть постоянны световые векторы всех образующих его лучей. Если эти векторы изменяются с течением времени, то поле будет переменным, хотя результирующий вектор при этом может оставаться неизменным. И вообще, только знание световых векторов всех лучей, пересекающихся в каждой точке поля, дает в общем случае возможность судить об освещенностях, получаемых на любых поверхностях, проходящих через эту точку.

Предположим, что каждый из лучей, пересекającychся в некоторой точке поля, представляет сходящийся в этой точке пучок, занимающий телесный угол $d\omega$. Обозначая световой вектор такого луча через $d\mathbf{E}$, найдем его величину из (42) и (87):

$$|d\mathbf{E}| = B d\omega, \quad (93)$$

где B — яркость луча.

Следовательно, все световые векторы будут заданы, если будут известны яркости соответственных лучей. Откладывая по направлению каждого луча от рассматриваемой точки отрезок, пропорциональный его яркости, и проводя поверхность через концы таких отрезков, получают наглядное и полное представление условий, в которых находится взятая точка поля. Эта поверхность как бы служит поверхностью некоторого тела, которое можно назвать телом яркости в данной точке поля [Л. 46]. Если, например, лучи идут в точку, заполняя непрерывно все окружающее пространство, и имеют одинаковую яркость, то таким телом будет шар.

В каждой точке поля мы можем себе представить множество площадок, нормали к которым имеют различные направления, характеризующие их положения. Каждая из этих площадок может быть освещена с двух сторон. Если по нормали к каждой площадке отложить отрезок, пропорциональный освещенности соответственной стороны площадки [Л. 46], то геометрическим местом концов этих отрезков будет некоторая замкнутая поверхность, окружающая данную точку поля или проходящая через нее. Тело, как бы заполняющее пространство, ограниченное такой поверхностью, можно назвать телом освещенности.

Очевидно, что каждому телу яркости соответствует определенного вида тело освещенности. Действительно, каждому распределению яркости лучей, сходящихся в какой-либо точке, соответствуют зависящие только от этих лучей значения освещенности всех площадок, проходящих через эту точку.

Тело яркости может иметь любой вид, тело же освещенности не может быть произвольным [Л. 217]. Нельзя, например, потребовать, чтобы освещенность одной из площадок, проходящих через рассматриваемую точку поля, была не равна, а нескольких других — равна нулю.

В случае действия одного луча тело яркости обращается в отрезок прямой. Телом освещенности в этом случае будет, как нетрудно убедиться, шар, совмещенный диаметром с лучом, на поверхности которого оказывается рассматриваемая точка поля. Практически вместо построения такого тела для описания условий освещения во многих случаях достаточно определять освещенности шести граней малого куба.

Световой вектор всегда можно получить по трем его составляющим или проекциям на оси прямоугольной системы координат. Вообще же он определяется формулами (89) и (90). Его полезность для расчета распределения света зависит от того, насколько велико число случаев, в которых знания его поля достаточно, чтобы вычислить распределение света на любой поверхности, внесенной в это поле. С этой точки зрения полезность векторных представлений для расчета распределения света иногда отвергали, как и по другим соображениям, необоснованность которых была выяснена [Л. 237, 238].

Знание поля светового вектора дает те же возможности, что и задание тел яркости или освещенности, но в более простом виде, если принять во внимание сказанное выше о том, что это поле должно быть изменяемо при внесении в него тех или иных тел. Пользуясь только результирующим световым вектором, можно решать такие задачи, как вычисление освещенности, когда поле постоянно, а результирующий вектор зависит от лучей, падающих на одну сторону освещаемой поверхности, как это было показано выше. Такое положение в постоянном поле может часто иметь место непосредственно, или же дело можно свести к нему, исключив все лучи, кроме падающих на освещаемую сторону, и рассматривая поле результирующего вектора последних.

Применение светового вектора в указанных случаях приводит к существенному упрощению исследования распределения света по сравнению с тем, что дает полное задание свойств поля значениями яркости для всех точек и по всем направлениям.

Как пример применения векторной алгебры в фотометрии приведем задачу о разыскании положения площадки, освещенной несколькими точечными источниками, в котором ее освещенность максимальна.

Решая эту задачу, Либенталь рассматривал [Л. 52] два источника, помещенных в точках 1 и 2 (рис. 20), создающие в точке

3 нормальные освещенности E_1 и E_2 . Возьмем некоторую плоскость, проходящую через точку 3, и обозначим через β_1 и β_2 углы наклона лучей, падающих на эту плоскость от источников 1 и 2. Затем дадим углу β_1 приращение x . Тогда освещенность рассматриваемой плоскости в точке 3

$$E = E_1 \sin(\beta_1 + x) + E_2 \sin(\beta_2 - x).$$

Из условия $\frac{\partial E}{\partial x} = 0$ находим, что максимальное значение освещенности будет при x , определяемом уравнением

$$\operatorname{tg} x = \frac{E_1 \cos \beta_1 - E_2 \cos \beta_2}{E_1 \sin \beta_1 + E_2 \sin \beta_2};$$

$$E_{\text{макс}} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1 E_2 \cos(\beta_1 + \beta_2)}.$$

Отсюда следует, что максимальной будет освещенность плоскости, перпендикулярной геометрической сумме отрезков E_1 и E_2 , отложенных по направлению лучей 1—3 и 2—3 (рис. 20), причем освещенность равна этой геометрической сумме.

Либенталь обобщил этот вывод на случай действия многих точечных источников, в котором наибольшую освещенность, равную геометрической сумме нормальных освещенностей от всех источников, имеет площадка, перпендикулярная этой геометрической сумме. Последняя определяет величину и направление светового вектора, так что решение Либенталья в самом общем случае следует из (90).

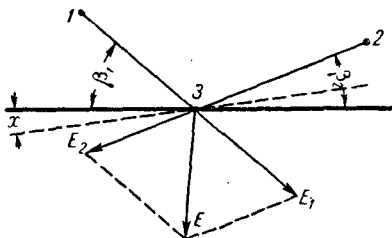


Рис. 20.

§ 14. Теория светового поля

Первое применение векторной алгебры в фотометрии было предложено Бурместером [Л. 37] в виде геометрического сложения освещенностей. Затем этот метод развил Либенталь (§ 13). Блондель рассматривал освещенность как проекцию вектора [Л. 55] для расчета искусственного освещения, а Мемке [Л. 57] — для естественного. Аналогичные представления применялись в теории тепла [Л. 61]. Однако применение векторной алгебры еще не открывало всех возможностей, даваемых теорией поля. Последнюю ввел в фотометрию Герман [Л. 60]. Эту

теорию, применявшуюся также в других работах [Л. 66, 83, 109], затем развили А. А. Гершун и М. М. Гуревич [Л. 124, 125]. А. А. Гершун сделал особенно большой вклад в ее развитие [Л. 217, 218, 227, 228, 237, 269], продолжавшееся и другими авторами [Л. 169, 295, 296, 394].

Выяснение свойств поля светового вектора начнем с рассмотрения потока через конечную поверхность S . Предположим, что эта поверхность не проходит через точки, принадлежащие источникам. По (84), т. е. в общем случае падения лучей на обе стороны поверхности, поток светового вектора через нее

$$F = F_1 - F_2, \quad (94)$$

где F_1 и F_2 — потоки, падающие на одну и другую стороны поверхности. Тогда поток светового вектора через геометрическую (т. е. воображаемую, свободно пропускающую свет) поверхность есть количество световой энергии, переходящее в единицу времени из одной части пространства, отделяемой этой поверхностью, в другую, в итоге прохождения света в том и другом направлении. Отсюда следует, что поток светового вектора через замкнутую поверхность в пустоте, внутри которой нет источников, равен нулю, если вектор постоянен во всех точках поля: количество энергии, входящее в объем, ограниченный этой поверхностью, должно быть равно выходящему из него количеству. Это означает, что в поле, характеризуемом постоянством светового вектора, каждый неподвижный и постоянный объем содержит постоянную световую энергию.

Объемная плотность световой энергии равна пространственной освещенности, деленной на скорость света [Л. 217]. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим сходящийся пучок лучей, имеющий яркость B и занимающий телесный угол $d\omega$, на пути которого выделим объем d^2v , образованный перпендикулярной лучу площадкой ds_n и параллельным лучу отрезком dr :

$$d^2v = ds dr.$$

Согласно (43), световой поток, падающий на площадку ds_n ,

$$d^2F = B d\omega ds_n.$$

Время, в течение которого луч проходит через объем d^2v ,

$$dt = \frac{dr}{c},$$

где c — скорость света в пустоте. За это время в объем d^2v войдет световая энергия, равная

$$d^2F dt = \frac{B d\omega}{c} d^2v.$$

Следовательно, объемная плотность световой энергии в точке поля, окружаемой объемом d^2v ,

$$dU = \frac{B d\omega}{c}.$$

Полная объемная плотность энергии, производимая лучами, сходящимися в некоторую точку со всех сторон,

$$U = \frac{1}{c} \int_{4\pi} B d\omega. \quad (95)$$

Сопоставляя (95) и (48), получаем:

$$U = \frac{F_{\odot}}{c}. \quad (96)$$

Эта величина аналогична введенной Планком для лучистой энергии объемной плотности радиации [Л. 107].

Поток светового вектора через поверхность, замыкающую часть пространства с источниками, уже не будет равен нулю, а равен, очевидно, световому потоку этих источников, поскольку мы рассматриваем поле в пустоте.

Условившись обозначать через F_{\odot} световой поток, возникающий (излучение) или исчезающий (поглощение) внутри замкнутой поверхности s , можно написать следующее уравнение для поля постоянного светового вектора, объединяющее выводы из предыдущих рассуждений:

$$\oint_s \mathbf{E} n ds = F_{\odot}. \quad (97)$$

По теореме Гаусса, поток вектора через замкнутую поверхность равен интегралу расхождения вектора по

ограниченному этой поверхностью объему. Следовательно,

$$F_{\circ} = \int_v \operatorname{div} \mathbf{E} \, dv, \quad (98)$$

и рассматривая элемент объема dv , окружающий какую-либо точку поля, находим, что в этой точке

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{dF_{\circ}}{dv}. \quad (99)$$

Расхождение светового вектора есть, таким образом, объемная или пространственная плотность светового потока, обозначаемая далее через Q . В табл. 4 дана сводка значений, которые на основании предыдущих соображений должны иметь расхождение в зависимости от свойств поля и среды.

В случае постоянного во времени светового вектора в пустоте

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (100)$$

откуда следует, что поле постоянного светового вектора в среде, каким бы то ни было влиянием которой можно пренебречь, соленоидально. Построив в таком поле линии светового вектора, называемые световыми линиями, можно образовать из них трубки, поток через любое сечение которых одинаков, так как поверхность трубки одинаково освещена с обеих сторон, т. е. поток через нее равен нулю. Этого не будет в тех областях поля, где по одной из причин, приведенных в табл. 4,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \neq 0,$$

вследствие чего поток через разные сечения трубки становится различным.

Таблица 4

Расхождение светового вектора

Вектор	Среда	Расхождение
Постоянный	Пустота	0
»	Поглощающая	Постоянное, отрицательное
»	Излучающая	Постоянное, положительное
Переменный	Любая	Переменное, положительное или отрицательное

Из (100) и (91) непосредственно следует соленоидальность вектора телесного угла [Л. 248].

Рассмотрим, наконец, вихрь свтового вектора. Предположим, что в некоторую точку поля в пустоте приходит один только луч, характеризуемый силой света I и рассматриваемый, таким образом, как расходящийся пучок. Расстояние от вершины пучка или точечного источника, посылающего луч, до взятой точки поля пусть будет r . Тогда, согласно (87) и (37), величина светового вектора в этой точке

$$|\mathbf{E}| = \frac{I}{r^2}. \quad (101)$$

А так как направление светового вектора совпадает с направлением луча, вектор можно написать, умножив его величину на единичный вектор направления луча \mathbf{r}/r (\mathbf{r} — вектор расстояния r):

$$\mathbf{E} = I \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (102)$$

Таким образом, световой вектор можно рассматривать как произведение скаляра I на вектор \mathbf{r}/r^3 . Вихрь этого произведения, т. е.

$$\text{rot } \mathbf{E} = I \text{rot } \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \left[\nabla I \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right],$$

где

$$\nabla I = \text{grad } I;$$

но

$$\text{rot } \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0;$$

поэтому

$$\text{rot } \mathbf{E} = \frac{1}{r^3} [\nabla I \cdot \mathbf{r}]. \quad (103)$$

Замечая, что в пустоте сила света не изменяется вдоль характеризуемого ею луча, а может изменяться при переходе к соседнему лучу, идущему из того же точечного источника, заключаем, что ее градиент направлен перпендикулярно лучу. Поэтому произведение $[\nabla I \cdot \mathbf{r}]$

не равно нулю, если не равен нулю градиент силы света. Следовательно, в поле точечного источника

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

(поле безвихревое) лишь при условии, что сила света не зависит от направления.

Когда в рассматриваемую точку поля приходят лучи от нескольких точечных источников, вихрь результирующего светового вектора будет равен сумме вихрей отдельных лучей. Следовательно, световое поле точечных источников всегда будет безвихревым, если создающие его источники равномерные. В некоторых частных случаях безвихревым является и поле источников конечных размеров (§ 25), когда в каждую точку поля приходят лучи с попарно противоположными вихрями одинаковой величины или с вихрями, равными нулю. Только в таких случаях световое поле имеет потенциал — скалярную функцию V , градиент которой определяет световой вектор:

$$\mathbf{E} = -\nabla V. \quad (104)$$

Если при этом

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = Q, \quad (105)$$

то потенциал определяется уравнением Пуассона [Л. 295]

$$\nabla^2 V = -Q, \quad (106)$$

при $Q=0$ переходящим в уравнение Лапласа:

$$\nabla^2 V = 0. \quad (107)$$

В случае поля, создаваемого, например, ртутными лампами, имеющими резонансную линию в ультрафиолетовой области спектра, световое поле, в котором нет ни поглощения, ни рассеяния [Л. 239], будет иметь потенциал [Л. 240], тогда как поле вектора радиации его не имеет (если не рассматривать бесконечно длинную линию ламп — § 36). Действительно (§ 11), световое поле создается излучением той области спектра, в которой лампы подчиняются закону Эйлера, а поле вектора радиации зависит от резонансного излучения, подчиненного закону Ламберта.

Однако поверхности, ортогональные линиям вектора, могут существовать и в вихревом поле, если выполнено известное условие существования таких поверхностей:

$$\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (108)$$

При соблюдении этого условия в поле существует квазипотенциал W , т. е. скалярная функция точки, поверхности уровня которой ортогональны линиями вектора, определяемого в этом случае уравнением [Л. 217, 295]

$$\mu \mathbf{E} = -\nabla W, \quad (109)$$

где μ — другая скалярная функция точки (интегрирующий множитель), подчиненная условию

$$\text{rot}(\mu \mathbf{E}) = 0.$$

В этом случае

$$\text{div} \mathbf{E} = -\text{div} \left(\frac{1}{\mu} \nabla W \right) = - \left[\nabla \left(\frac{1}{\mu} \right) \cdot \nabla W + \frac{1}{\mu} \text{div}(\nabla W) \right],$$

т. е.

$$\text{div} \mathbf{E} = -\nabla \left(\frac{1}{\mu} \right) \cdot \nabla W - \frac{1}{\mu} \nabla^2 W. \quad (110)$$

При условии (105) отсюда следует уравнение Муна и Спенсер

$$\nabla^2 W = -\mu \left[Q + \nabla \left(\frac{1}{\mu} \right) \cdot \nabla W \right], \quad (111)$$

применимое при соблюдении условия (108).

Таким образом, при $Q=0$ квазипотенциал определяется уравнением [Л. 295]

$$\nabla^2 W = -\mu \nabla \left(\frac{1}{\mu} \right) \cdot \nabla W. \quad (112)$$

Если

$$\nabla \left(\frac{1}{\mu} \right) \cdot \nabla W = 0, \quad (113)$$

т. е. $\nabla \left(\frac{1}{\mu} \right)$ и \mathbf{E} перпендикулярны, то (111) сводится к уравнению Пуассона:

$$\nabla^2 W = -\mu Q, \quad (114)$$

а (112) — к уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 W = 0. \quad (115)$$

В этом случае из уравнений (114) и (115) может быть найден квазипотенциал, соответствующий интегрирующему

щему множителю, удовлетворяющему условию (113). У светового поля могут быть, однако, различные интегрирующие множители и квазипотенциалы, имеющие соответственно различные выражения.

Кроме квазипотенциалов, находимых из уравнений (114) и (115), можно найти и другие. Но интегрирующие множители, удовлетворяющие условию (113), соответствуют лишь квазипотенциалам, находимым из (114) и (115). Единственному решению задачи о разыскании светового вектора может удовлетворять множество решений задачи о разыскании квазипотенциала, как это показано далее на некоторых примерах.

Потенциал и отношение квазипотенциала к интегрирующему множителю μ имеют размерность отношения потока к длине. Нулевое значение потенциала может быть приписано любой эквипотенциальной поверхности, как и нулевое значение квазипотенциала — любой поверхности его уровня, но этим определяются их значения во всех других местах поля.

Квазипотенциал существует в поле всякого точечного источника, где условие (108) всегда выполнено, поскольку, как уже выяснено, градиент силы света перпендикулярен лучу, а следовательно, перпендикулярен лучу, т. е. световому вектору, и вихрь последнего. Геометрически это следует из того, что световые линии в данном случае должны быть пучком ортогональных траекторий некоторого семейства поверхностей (§ 1), которыми являются поверхности уровня квазипотенциала.

Рассмотрим равномерный точечный источник, имеющий силу света I . Так как в этом случае поверхности уровня квазипотенциала — концентрические сферы, а световой вектор, согласно (102), зависит только от расстояния r до источника, интегрирующий множитель также может быть лишь функцией расстояния r . Поэтому уравнение (109) принимает вид:

$$-\frac{1}{\mu(r)} \cdot \frac{dW}{dr} = \frac{I}{r^2},$$

откуда квазипотенциал, определяемый с точностью до постоянной,

$$W = -I \int \frac{\mu(r)}{r^2} dr. \quad (116)$$

При $\mu=1$ квазипотенциал превращается в потенциал

$$V = \frac{I}{r}, \quad (117)$$

наряду с которым световое поле равномерного точечного источника обладает множеством квазипотенциалов, получаемых из (116) при различного вида функциях $\mu(r)$.

Другой широкий класс световых полей, обладающих квазипотенциалом, — двумерные поля [Л. 217, 242, 295]. Сюда относится поле с осевой симметрией, т. е. поле всякого источника, имеющего ось симметрии, которое достаточно описать в плоскости, проходящей через эту ось (частные случаи — поля симметричного точечного источника и излучающей прямой). Сюда относится также плоское поле, например поле излучающего цилиндра бесконечной высоты, которое достаточно описать в плоскости, перпендикулярной образующей цилиндра.

Рассмотрим точку плоскости, характеризующей такое двумерное поле, и сходящийся в ней пучок лучей; занимающий телесный угол $d\omega$ (ось которого лежит в данной плоскости), имеющий яркость B и создающий в этой точке светой вектор $d\mathbf{E}$. Из (88)

$$\text{rot } d\mathbf{E} = B \text{ rot } d\omega + [\nabla B \cdot d\omega]; \quad (118)$$

здесь

$$\text{rot } d\omega = 0,$$

так что

$$\text{rot } d\mathbf{E} = [\nabla B \cdot d\omega].$$

При отсутствии поглощения и рассеяния яркость не изменяется вдоль луча, но в общем случае она может изменяться от луча к лучу, т. е. в зависимости от направления в рассматриваемой плоскости. Поэтому градиент яркости лежит, если он не равен нулю, в той же плоскости, что и вектор $d\omega$. Тогда вихрь светового вектора $d\mathbf{E}$ должен быть направлен по нормали к рассматриваемой плоскости, т. е. перпендикулярно вектору $d\mathbf{E}$.

Таким же будет расположение результирующего светового вектора всех пучков, сходящихся в той же плоскости в данную точку, и его вихря, равного сумме вихрей слагаемых векторов. Вследствие симметрии то же

направление будет иметь сумма векторов телесных углов $d\omega$, заполняющих двугранный телесный угол, образуемый плоскостями, разведенными на малый угол $d\theta$ и перпендикулярными плоскости поля, делящей двугранный угол пополам (рис. 21). По условию, поскольку поле плоское, яркость в пределах такого элементарного двугранника постоянна. При этом результирующий вектор ω , лежащий в рассматриваемой плоскости, будет также перпендикулярен вихрю образуемого им светового

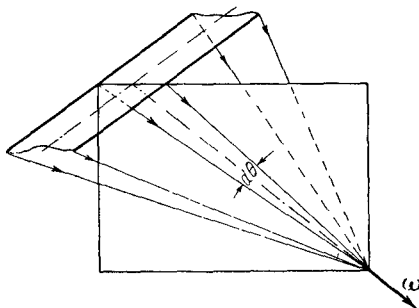


Рис. 21.

вектора, откуда и следует условие (108).

Двухмерное поле может быть представлено графически сеткой световых линий и ортогональных им следов, образуемых на плоскости, в которой описывается поле, эквипотенциальными поверхностями или поверхностями уровня квазипотенциала. В

простейшем случае точечного источника, например, такая сетка имеет вид пучка полупрямых и семейства концентрических окружностей.

Посредством конформного отображения более сложные сетки, представляющие двухмерные световые поля, могут быть преобразованы в более простые. При этом сохраняются соотношения потоков в различных световых трубках, и распределение света в поле сложной конфигурации может быть найдено из простейших геометрических соотношений. Применение этого метода показано далее (§ 37).

По теореме Стокса, поток соленоидального вектора через поверхность s всегда может быть выражен линейным интегралом некоторого вектора \mathbf{A} по ограничивающему эту поверхность контуру l . Поэтому при $Q=0$

$$\int_s \mathbf{E} n ds = \oint_l \mathbf{A} dl, \quad (119)$$

где \mathbf{A} — вектор-потенциал, определяемый уравнением

$$\mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (120)$$

В вихревом поле

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{H},$$

где \mathbf{H} — известная векторная функция точки. Тогда вектор-потенциал определяется векторным уравнением Пуассона [Л. 295]

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{H}.$$

В развитие теории светового поля применительно к поляризованным лучам, Спенсер предложила пользоваться методами тензорного анализа [Л. 387].

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ТОЧЕЧНЫЕ ИСТОЧНИКИ

§ 15. Расчет освещенности

В каждой точке пространства, где распространяется свет, может происходить пересечение множества лучей, имеющих различные направления. Одной из основных задач теоретической фотометрии является расчет освещенности какой-либо стороны поверхности, проходящей через такую точку. Эта освещенность зависит только от лучей, падающих на рассматриваемую сторону поверхности (§ 13), и создающих световой вектор \mathbf{E}_1 , представляющий в общем случае (когда лучи падают на обе стороны поверхности) составляющую светового вектора, существующего во взятой точке пространства. Искомая освещенность определяется формулой (86), выражающей обобщенный закон наклона. Луч, идущий от точечного источника, дает на рассматриваемой поверхности освещенность

$$E_\vartheta = |\mathbf{E}_\vartheta| \cos \vartheta,$$

где \mathbf{E}_ϑ — зависящая от этого луча составляющая светового вектора;

ϑ — угол падения луча на освещаемую поверхность.

Закон наклона может быть преобразован к виду, удобному в расчетах, относящихся к точечным источникам, если косинус угла падения заменить отношением

двух расстояний. Освещенность плоскости I (рис. 22) в точке O

$$E' = \frac{I \cos \vartheta'}{r^2},$$

где r — расстояние от источника до точки O ;

I — сила света под углом ϑ' .

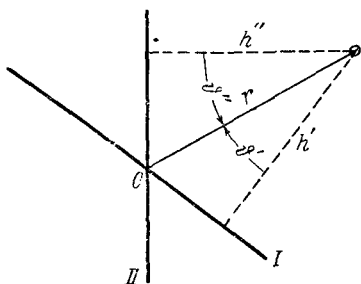


Рис. 22.

Опустим из источника перпендикуляр на эту плоскость; его длина h' ; тогда

$$\cos \vartheta' = \frac{h'}{r};$$

$$E' = \frac{Ih'}{r^3}.$$

Освещенность плоскости II в той же точке

$$E'' = \frac{I \cos \vartheta''}{r^2} = \frac{Ih''}{r^3},$$

где h'' — длина перпендикуляра, опущенного из источника на плоскость II .

Отношение освещенностей

$$\frac{E'}{E''} = \frac{h'}{h''}.$$

Очевидно, что это отношение будет постоянно по всей линии пересечения плоскостей I и II .

Таким образом, закон наклона может быть выражен следующим правилом перпендикуляров: освещенности двух плоскостей в одной и той же точке относятся как длины перпендикуляров, опущенных из источника на эти плоскости [Л. 82]. Это правило применимо и при расчете освещенности криволинейных поверхностей, поскольку освещенность поверхности равна освещенности плоскости, касательной в точке падения луча. Отношение перпендикуляров может быть различным образом выражено через углы и расстояния, определяющие расположение источника и освещаемых плоскостей [Л. 126, 174].

Рассматривая три плоскости, проходящие через не-

которую точку: нормальную лучу, перпендикулярную оси источника (горизонтальную) и параллельную ей, проходящую через пересечение первых двух (вертикальную), находим треугольник освещенностей (рис. 23): нормальная освещенность E_n равна геометрической сумме горизонтальной и вертикальной освещенностей E_h и E_v [Л. 407].

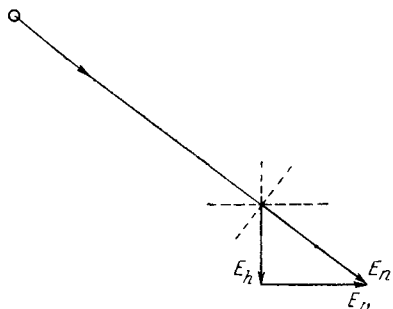


Рис. 23.

Практически важен частный случай расчета освещенности плоскости, перпендикулярной фотометрической оси источника. Эта освещенность (горизонтальная, если ось источника вертикальна) в точке, находящейся на расстоянии r от источника (рис. 24), в направлении к которой источник имеет силу света I ,

$$E_h = \frac{I}{r^2} \cos \vartheta, \quad (121)$$

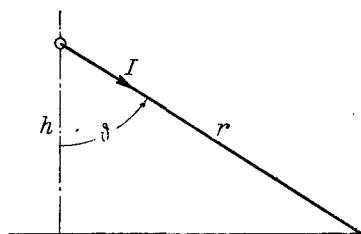


Рис. 24.

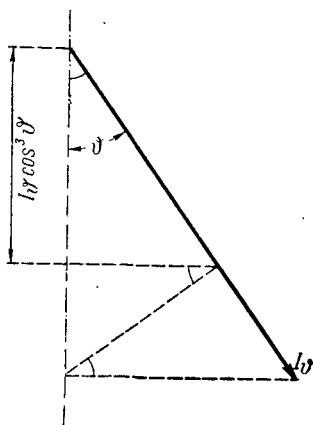


Рис. 25.

где ϑ — угол падения; отсюда — известная формула:

$$E_h = \frac{I}{h^2} \cos^3 \vartheta, \quad (122)$$

где h — расстояние от источника до освещаемой плоскости.

Графический прием для получения произведения $I_{\vartheta} \cos^3 \vartheta$ показан на рис. 25.

При решении некоторых задач могут быть полезны различные преобразования выражения (122), в частности, получаемые его логарифмированием [Л. 164].

Рассматривая какую-либо поверхность, освещаемую точечным источником, и находя на ней точки, в которых ее освещенность одинакова, можно построить на этой поверхности линии равной освещенности, называемые изолюксами. Понятие о таких линиях как о геометрическом месте точек равной освещенности впервые ввел в 1823 г. Антонио Бордони в Павии [Л. 22].

§ 16. Световой поток точечного источника

Согласно (34), световой поток точечного источника

$$F = \int I d\omega,$$

где I — сила света, в общем случае зависящая от углов α и ϑ , функцией которых является индикатриса.

Принимая во внимание (2), имеем:—

$$F = \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} I \sin \vartheta d\vartheta d\alpha,$$

или

$$F = \int_0^{2\pi} F'_\alpha d\alpha, \quad (123)$$

где

$$F'_\alpha = \int_0^{\pi} I \sin \vartheta d\vartheta; \quad (124)$$

$F'_\alpha d\alpha$ — световой поток, даваемый источником внутри двугранного угла, образованного двумя плоскостями, проходящими через ось источника и повернутыми на угол $d\alpha$ одна относительно другой (рис. 26, где соответствующий телесный угол заштрихован).

Когда уравнение зависимости силы света от углов α и ϑ неизвестно, поток может быть найден следующим способом. Вычислим интеграл, входящий в последнее выражение, в пределах от $\vartheta - \Delta\vartheta$ до $\vartheta + \Delta\vartheta$.

$$\Delta F'_\alpha = \int_{\vartheta - \Delta\vartheta}^{\vartheta + \Delta\vartheta} I \sin \vartheta d\vartheta;$$

тогда

$$F'_\alpha = \sum \Delta F'_\alpha,$$

где число слагаемых равно $\pi/2\Delta\theta$. По теореме о среднем значении интеграла,

$$\Delta F'_\alpha = I_m \int_{\vartheta - \Delta\vartheta}^{\vartheta + \Delta\vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = I_m [\cos(\vartheta - \Delta\vartheta) - \cos(\vartheta + \Delta\vartheta)],$$

где I_m — некоторое значение силы света в пределах угла $2\Delta\theta$.

При достаточно малом $\Delta\theta$ (часто берут $2\Delta\theta = 10^\circ$) точность получается достаточной, если принимать за I_m силу света в направлении ϑ .¹ Тогда можно написать, пользуясь тригонометрическим преобразованием, что

$$\Delta F'_\alpha = 2I_\vartheta \sin \vartheta \sin \Delta\vartheta$$

и [Л. 64]

$$F'_\alpha = 2 \sin \Delta\vartheta \sum I_\vartheta \sin \vartheta.$$

Теперь разобьем промежуток интегрирования в (123) на части $2\Delta\alpha$.

В пределах $2\Delta\alpha$ можно написать, аналогично предыдущему,

$$\Delta F = F'_\alpha \int_{\alpha - \Delta\alpha}^{\alpha + \Delta\alpha} dx = 2F'_\alpha \Delta\alpha;$$

тогда

$$F = 2\Delta\alpha \sum F'_\alpha,$$

или

$$F = 4\Delta\alpha \sin \Delta\alpha \sum_\alpha \sum_\vartheta I \sin \vartheta. \quad (125)$$

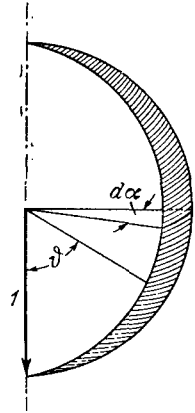


Рис. 26.

¹ Е. П. Тверитинов принимал в качестве I_m среднее арифметическое из значений силы света в начале и в конце промежутка $2\Delta\theta$, т. е. пользовался формулой трапеций [Л. 43]. Предложены способы вычисления потока источника по силам света в некоторых направлениях [Л. 73, 385]. Повышение точности дает вычисление интеграла, выражающего поток, по способу П. Л. Чебышева [Л. 135, 223].

Если источник симметричный, то сила света не зависит от угла α , интегрирование по которому может быть сразу выполнено; тогда

$$F = 2\pi \int_0^{\pi} I_{\vartheta} \sin \vartheta d\vartheta, \quad (126)$$

или

$$F = \sum \Delta F_{\vartheta},$$

где ΔF_{ϑ} — зональный световой поток, т. е. световой поток внутри угла между конусами, образованными вращением лучей, идущих под углами $\vartheta - \Delta\vartheta$ и $\vartheta + \Delta\vartheta$ около фотометрической оси. Число зон равно $\pi/2\Delta\vartheta$.

Зональный поток

$$\Delta F_{\vartheta} = 2\pi I_{\vartheta} [\cos(\vartheta - \Delta\vartheta) - \cos(\vartheta + \Delta\vartheta)],$$

или¹

$$\Delta F_{\vartheta} = 4\pi \sin \Delta\vartheta \cdot I_{\vartheta} \sin \vartheta. \quad (127)$$

Следовательно, полный поток источника

$$F = 4\pi \sin \Delta\vartheta \sum_{\Delta\vartheta}^{\pi-\Delta\vartheta} I_{\vartheta} \sin \vartheta. \quad (128)$$

Например, беря десятиградусные зоны, т. е. полагая

$$2\Delta\vartheta = 10^\circ,$$

суммируем произведения I_{ϑ} на $\sin \vartheta$, вычисленные для значений $\vartheta = 5, 15, 25, \dots, 175^\circ$, и сумму умножаем на

$$4\pi \sin 5^\circ = 1,095.$$

В случаях, когда индикатриса резко меняется при небольших изменениях угла, должны быть взяты более узкие зоны — например, $5^\circ, 1^\circ$ и т. п.

Если в предыдущих формулах поставить на место силы света индикатрису $f(\alpha, \vartheta)$, то вместо потока F будет найден эквивалентный телесный угол Ω .

Для симметричного источника

$$\Omega = 2\pi \int_0^{\pi} f(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta, \quad (129)$$

где k равно $1/2$ или 1 при излучении соответственно в одну или в обе полусферы.

¹ I_{ϑ} определяют также как среднее арифметическое сил света в направлениях $\vartheta - \Delta\vartheta$ и $\vartheta + \Delta\vartheta$ [Л. 89].

Для несимметричного источника

$$\Omega = \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{k\pi} f(\alpha, \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\alpha. \quad (130)$$

Существуют также способы вычисления светового потока несимметричного источника, основанные на представлении индикатрисы в функции других координат [Л. 360]. Для решения некоторых задач может оказаться удобной такая система координат, относительно осей которой становится несимметричным и симметричный источник (§ 27).

Когда источник дает световой поток в пределах малого телесного угла, можно воспользоваться разложением

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Откинув все члены, кроме первых двух (третий член следует, однако, вычислить для оценки погрешности), получим:

$$\cos(\vartheta - \Delta\vartheta) - \cos(\vartheta + \Delta\vartheta) = \frac{1}{2} [(\vartheta + \Delta\vartheta)^2 - (\vartheta - \Delta\vartheta)^2] = 2\vartheta \Delta\vartheta.$$

Тогда

$$\Delta F'_\alpha = 2I_\vartheta \vartheta \Delta\vartheta;$$

$$\Delta F_\vartheta = 4\pi I_\vartheta \vartheta \Delta\vartheta,$$

где углы должны быть выражены в радианах, или

$$\Delta F_\vartheta = 3,83 \cdot 10^{-3} I_\vartheta \vartheta \Delta\vartheta,$$

если углы выражены в градусах.

Например, производя вычисление в пределах изменения угла ϑ от 0 до 1° , можно взять десятиминутные зоны, т. е. $\Delta\vartheta = 5'$, и суммировать произведения $I_\vartheta \vartheta$ при $\vartheta = 5', 15' \dots, 55'$.

Интеграл

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} I \sin \vartheta \, d\vartheta,$$

входящий в формулы (123) и (124), может быть вычислен еще графически по способу Руссо [Л. 50]. Проведем вокруг источника L (рис. 27) полуокружность единичного радиуса до пересечения с фотометрической осью, а с другой стороны последней расположим прямоугольную систему координат z, I . Начало этой системы O поместим в точку пересечения полуокружности с направлением $\vartheta = 0$, а ось OZ совместим с фотометрической осью. Тогда координаты z и ϑ будут связаны соотношением

$$z = 1 - \cos \vartheta; \quad (131)$$

отсюда

$$dz = \sin \vartheta d\vartheta;$$

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} I \sin \vartheta d\vartheta = \int_{z_1}^{z_2} I dz. \quad (132)$$

Следовательно, построив кривую силы света в координатах z, I (откладывая по оси OI силы света, соответствующие каждому z , это легко сделать графически, как показано на рисунке), можем вычислить площадь, ограниченную этой

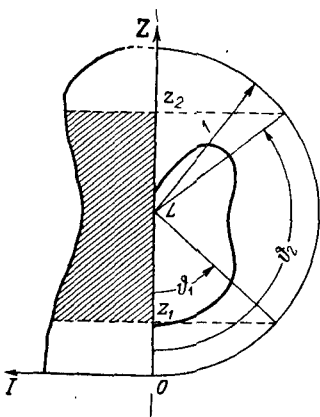


Рис. 27.

кривой, осью OZ и ординатами, соответствующими углам ϑ_1 и ϑ_2 (при измерении площади необходимо учесть, что радиус вспомогательной окружности должен быть принят равным единице).

Световой поток, даваемый симметричным источником в зоне от ϑ_1 до ϑ_2 , равен измеренной площади, умноженной на 2π . Для вычисления полного потока источника следует принять $\vartheta_1 = 0$; $\vartheta_2 = \pi$; $z_1 = 0$; $z_2 = 2$, т. е. измерить полную площадь, ограниченную построенной кривой Руссо.¹ Средняя сферическая сила света равна половине этой площади [Л. 67]:

$$I_{\ominus} = \frac{1}{2} \int_0^2 I dz. \quad (133)$$

¹ Предложены аналогичные способы, в которых поток измеряется площадью в полярных [Л. 131] и иных прямоугольных координатах [Л. 74, 80, 178].

Графический расчет по этому способу имеет преимущества перед вычислением по формуле (128), если кривая Руссо построена тщательно, а площадь ее найдена планиметрированием. Для несимметричного источника построение необходимо сделать в различных плоскостях (через определенные промежутки $\Delta\alpha$), проходящих через фотометрическую ось.

§ 17. Световое поле точечного источника

На рис. 28 представлено сечение одной из световых трубок симметричного источника полуплоскостью, проходящей через фотометрическую ось. В этом сечении ширина трубки, образуемой двумя круговыми конусами, имеющими вершину в источнике, определяется углом $\Delta\vartheta$. Образующая внутреннего конуса составляет с осью источника угол $\vartheta - \frac{\Delta\vartheta}{2}$, а образующая внешнего — угол $\vartheta + \frac{\Delta\vartheta}{2}$. Следовательно, в трубке заключен зональный поток, определяемый по (127).

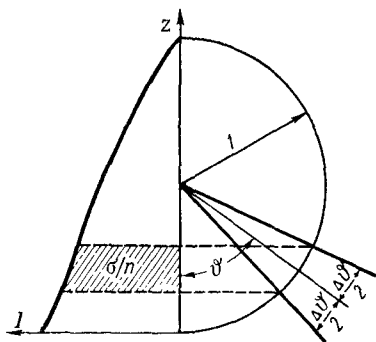


Рис. 28.

Если задано, что в каждой трубке должна находиться $1/n$ часть потока F источника, то, разделив на n частей площадь σ диаграммы Руссо, найдем углы $\Delta\vartheta$ для всех трубок, как показано на рисунке. Если затем каждую из построенных конических трубок разделить на m частей меридиональными плоскостями, образующими между собой углы

$$\Delta\alpha = \frac{2\pi}{m},$$

то получатся трубки, ограниченные двумя коническими поверхностями и двумя полуплоскостями; каждая из таких трубок содержит поток F/nm .

Как было показано в § 14, в поле всякого точечного источника, как симметричного, так и несимметричного, существует квазипотенциал. Линии светового вектора образуют расходящийся из источника пучок лучей. Следовательно, поверхности равных значений квазипотенциала W являются сферическими, с общим центром в источнике [Л. 295]. Поле нескольких точечных источников в целом не имеет квазипотенциала [Л.217], за исключением случая равномерных источников, рассмотренного в § 14, в котором имеется потенциал, и некоторых совокупностей точечных источников, образующих излучающие поверхности (§ 25), элементами которых они являются.

Поскольку поверхность $W = \text{const}$ — сфера с центром в источнике, квазипотенциал W зависит только от расстояния r до источника. В общем случае величина светового вектора зависит от направления; по (90) и (50):

$$\mathbf{E} = I_0 f(\vartheta) \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Следовательно, уравнение (109) принимает вид:

$$\mu I_0 \frac{f(\vartheta)}{r^2} = - \frac{dW}{dr}.$$

Принимая во внимание, что правая часть последнего уравнения не зависит от угла ϑ , легко найти общее выражение интегрирующего множителя:

$$\mu = \frac{\lambda(r)}{f(\vartheta)}, \quad (134)$$

где $\lambda(r)$ — произвольная функция.

Выбор функции $\lambda(r)$ определяет вид квазипотенциала:

$$W = - I_0 \int \frac{\lambda(r)}{r^2} dr. \quad (135)$$

Выражения (135) и (134) определяют всю совокупность квазипотенциалов и соответственных интегрирующих множителей в поле симметричного точечного источника. В частном случае равномерного источника из (135) получается (116). При $\lambda(r) = 1$ интегрирующий

множитель и квазипотенциал имеют простейшие выражения, которые можно получить из уравнения Лапласа [Л. 344], так как при этом выполняется условие (113).

Образующие ограничивающих трубки конических поверхностей представляют световые линии, т. е. линии поля светового вектора в плоскости, проходящей через ось источника. При наличии нескольких точечных источников, расположенных в одной плоскости, световые линии могут быть построены в такой плоскости (а также в любой плоскости, проходящей через линию источников, если они расположены на одной прямой) графически по методу Максвелла [Л.217]. В каждой из таких плоскостей существуют линии, ортогональные световому вектору, вихрь которого, равный сумме вихрей слагаемых полей, ему перпендикулярен [Л 237]. Однако поверхности, ортогональные световым линиям, в поле нескольких точечных источников существуют, как было выяснено в § 14, лишь в том случае, когда эти источники равномерные. Предложены способы расчета освещения по чертежам световых трубок результирующего поля [Л. 217], построенных так, что световые потоки во всех трубках одинаковы.

§ 18. Характеристики симметричных точечных источников

Точечные источники, которые приходится рассматривать при изучении распределения лучистой энергии, лишь в редких случаях можно принимать за равномерные. Однако попытки всегда сводить дело к действию равномерных источников долго продолжались даже в технике освещения [Л.161], хотя применение электрических ламп и светильников показало, что здесь имеют место другие явления [Л. 63]. В общем случае точечный источник действует в разных направлениях неравномерно, и создаваемое им поле может существенно отличаться от картины, известной, например, в электростатике.

Как выяснено в предыдущем параграфе, поле неравномерного симметричного точечного источника может быть построено с помощью индикатрисы. С другой стороны, само поле, если оно дано, характеризует, очевидно, действие источника в зависимости от направления.

Известны, наряду с этим, и другие способы описания свойств точечных источников [Л. 209]. Они приводят к построению различных характеристик, показывающих, подобно индикатрисе, как действует источник в разных направлениях [Л. 344].

Индикатриса совпадает с кривой силы света, если в направлении, принятом за основное, сила света равна единице. Эти характеристики представляют потоки, которые источник посылает в различно ориентированных, но равных телесных углах. Подобным же образом чертеж световых трубок представляют телесные углы, в которых распространяются по разным направлениям одинаковые потоки. В обоих случаях сопоставляются поток и телесный угол, и различные характеристики получаются в зависимости от того, определяется ли поток телесным углом или наоборот. По этому признаку следует различать два рода характеристик точечных источников:

характеристика первого рода представляет зависимость геометрически определенной фотометрической величины от направления;

характеристика второго рода представляет зависимость от направления фотометрически определенной геометрической величины.

Обращаясь к характеристике первого рода, обозначим через F световой поток источника, имеющего индикатрису $f(\theta)$ и эквивалентный телесный угол Ω . Сила света такого источника под углом θ выражается формулой (54), из которой следует, что при различных значениях F кривые силы света подобны. Это свойство источника и позволяет, когда оно имеется, что всегда предполагается далее, принимать индикатрису за основную фотометрическую характеристику.

Заметим теперь, что согласно (37) кривую силы света можно рассматривать как график освещенности сферической поверхности единичного радиуса, в центре которой находится точечный источник. Действие источника в различных направлениях можно описывать, следовательно, и с помощью освещенностей, получаемых от него на некоторой поверхности. Такой поверхностью может быть не только сфера. Удобно описывать действие точечного источника, рассматривая освещенность плоскости, перпендикулярной его фотометрической оси и

находящейся на расстоянии $h = 1$ от источника. По формуле (122), такая освещенность равна

$$\frac{F}{\Omega} f(\vartheta) \cos^3 \vartheta.$$

Выражаемое этой функцией относительное распределение освещенности на плоскости, перпендикулярной оси источника, зависит только от угла ϑ , как указал В. Н. Чиколев [Л. 41], и сохраняет подобие при изменении светового потока источника. Это дает основание для введения новой фотометрической характеристики — относительной освещенности

$$\epsilon_h = \frac{f(\vartheta) \cos^3 \vartheta}{\Omega}. \quad (136)$$

Относительная освещенность — не зависящая от мощности источника и расстояния до него величина, которой пропорциональна освещенность рассматриваемой плоскости, перпендикулярной фотометрической оси источника. Подобные характеристики впервые предложил применять Курдвановский [Л. 9], тогда как Бугер пользовался индикатрисами.

Относительную освещенность ϵ_h представляют графически в прямоугольных координатах, откладывая ее по оси ординат, а по оси абсцисс [Л. 88]

$$x = \operatorname{tg} \vartheta,$$

т. е. отношение расстояния от проекции источника на освещаемую плоскость к высоте:

График должен давать ϵ_h вплоть до малых значений, соответствующих большим x , вследствие чего разные части кривой удобно строить в различном масштабе.

Другой прием состоит в применении принципа инверсии [Л. 151]: обрываем ось абсцисс при $x = 1$; всякая точка, имеющая абсциссу $x > 1$, будет изображена в пределах $0 \div 1$ по оси абсцисс, с абсциссой $1/x$. Часть кривой, соответствующая значениям $x > 1$, примет вид нижней ветви, показанной на рис. 29. Для этой, нижней ветви кривой относительной освещенности по оси абсцисс отложено

$$\frac{1}{x} = \operatorname{ctg} \vartheta.$$

Для большей точности конец нижней ветви изображают в увеличенном виде, а также применяют логарифмическую шкалу ординат.¹

К характеристикам первого рода относится также функция, представляющая зависимость потока, отнесенного к полному потоку источника, от телесного угла, образуемого вращением плоского угла ϑ около фотометрической оси. Эта функция выражает коэффициент

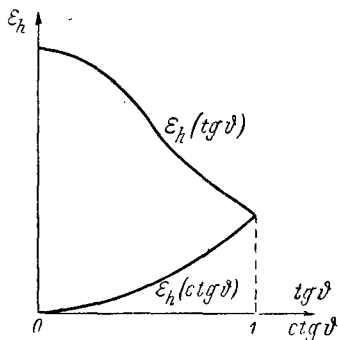


Рис. 29.

связи φ точечного источника с кругом, лежащим в плоскости, перпендикулярной фотометрической оси, проходящей через центр этого круга, радиус которого виден из источника под углом ϑ . Зависимость коэффициента связи φ от направления, определяемого углом ϑ , будет характеристикой источника, называемой кривой потока (или относительного потока). В разных случаях бывает удобно рас-

сматривать эту характеристику как функцию ϑ или $\operatorname{tg} \vartheta$ [Л. 88]; ее применяют главным образом для вычисления светового потока. По (70),

$$\varphi = \frac{2\pi}{\Omega} \int_0^{\vartheta} f(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (137)$$

Кривая потока может быть построена по индикатрисе, по способу Руссо, например, и обратно — индикатрисе и другие характеристики можно построить по кривой потока [Л. 163]. Поэтому как по кривым, представляющим зависимость освещенности от направления, можно вычислять поток в различных зонах, так по кривой потока — значения освещенности. Действительно, из (137)

$$d\varphi = \frac{2\pi}{\Omega} f(\vartheta) dz,$$

¹ Характеризуя относительной освещенностью светильник, принимаемый за точечный источник, вводят в нее множителем к. п. д. светильника, чтобы при вычислении освещенности умножать ε_h на световой поток установленной в светильнике лампы.

где z — по формуле (131), откуда

$$f(\theta) = \frac{\Omega}{2\pi} \frac{d\varphi}{dz}. \quad (138)$$

Последнее выражение дает возможность строить индикатрису по кривой потока, изображенной так, как она получается по способу Руссо, т. е. в виде зависимости φ от z . Построение показано на рис. 30. Взяв Δz , находим $\Delta\varphi$ как разность ординат кривой потока, соответствующих началу и концу участка Δz . Тогда в направлении под углом θ , как среднем в промежутке $\Delta\theta$, соответствующем Δz ,

$$f(\theta) = \frac{\Omega}{2\pi} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta z}.$$

При построении множитель $\Omega/2\pi$ можно рассматривать как произвольный коэффициент пропорциональности, который затем определяется из условия

$$f(0) = 1.$$

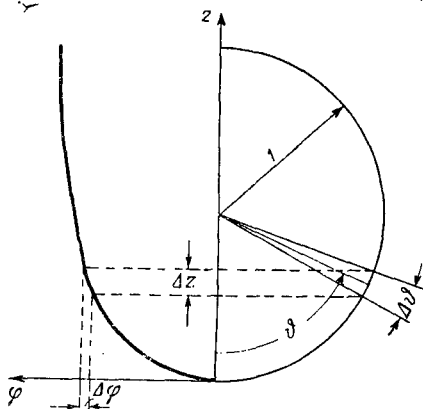


Рис. 30.

На том же основании могут быть построены и другие характеристики, например кривая относительной освещенности. Из (136) и (138)

$$\epsilon_h = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dz} \cos^3 \theta,$$

откуда

$$\epsilon_h = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi}{d(\operatorname{tg} \theta)}. \quad (139)$$

В этом выражается обратимость характеристик первого рода, представляющих распределение освещенности и потока.

Рассматривая кривую силы света как график освещенности сферической поверхности, мы характеризуем

действие неравномерного источника в разных направлениях переменной нормальной освещенностью, создаваемой им на постоянном расстоянии, равном радиусу сферы. Аналогичная характеристика второго рода должна определять для каждого направления то расстояние, на котором источник создает постоянную освещенность. Это может быть освещенность некоторой поверхности, называемой равноосвещенной или эквиплюксной. Световые трубки, содержащие одинаковые потоки, рассекают такую поверхность на равные части. Если же и здесь рассматривать нормальные освещенности, то характеристика будет геометрическим местом точек, в которых нормальная освещенность одинакова. Кривые, представляющие геометрические места точек, в которых точечный источник создаст одинаковые освещенности определенным образом расположенных площадок, называют пространственными [Л. 209] или полярными [Л. 251] изолюксами; площадки же эти назовем фотометрическими. Применяют два вида таких характеристик, впервые предложенных Вебером [Л. 47], но вошедших в практику лишь после того, как их вновь предложил А. А. Труханов [Л. 193].

В одном случае фотометрические площадки перпендикулярны фотометрической оси источника, в другом — параллельны, а характеристики называют соответственно изолюксами горизонтальной и вертикальной освещенности. В первом случае освещенность, на которую строится изолюкса, обозначим через e_h , во втором — через e_v , принимая,¹ что это — освещенности при $F=1$.

Кривые $e_h = \text{const}$ и $e_v = \text{const}$ строят в прямоугольных координатах, откладывая по оси ординат высоты h источника над плоскостью, перпендикулярной его оси, а по оси абсцисс — расстояния d от проекции источника на эту плоскость до точки, освещенность которой соответствует изолюксе². Источник предполагается по-

¹ При построении пространственных изолюкс светильника, его к. п. д. вводят множителем в e_h и e_v , принимая за единицу световой поток лампы.

² Расчет освещенности в прямоугольных координатах имеет известные преимущества [Л. 80], достигаемые применением кривых относительной освещенности и пространственных изолюкс.

мещенным в начале координат. Эти кривые также предложено строить в логарифмическом масштабе [Л. 102]. Для упрощения строят графики кривых ряда значений e_h и e_v , пользуясь которыми для вычисления освещенности нужно лишь найти кривую, проходящую через точку с заданными координатами d и h . Но нетрудно вычислить освещенность в любой точке поля и по одной изолюксе. Если нужно вычислить освещенность в точке d_1, h_1 , то по закону квадратов расстояния эта освещенность относится к освещенности точки d_0, h_0 , лежащей на линии того же луча (рис. 31), как

$$\frac{r_0^2}{r_1^2} = \frac{d_0^2}{d_1^2} = \frac{h_0^2}{h_1^2}. \quad (140)$$

Отсюда легко найти освещенность в точке d_1, h_1 , если d_0, h_0 — точки изолюксы.

Пространственные изолюксы можно построить по кривой относительной освещенности. Для построения изолюксы $e_h = \text{const}$ задаем некоторым значением $\text{tg } \vartheta$, для которого находим относительную освещенность e_h . Тогда координата

$$h_h = \sqrt{\frac{\varepsilon_h}{e_h}}. \quad (141)$$

Другая координата той же точки изолюксы

$$d = h_h \text{tg } \vartheta.$$

Подобным же образом можно вычислить координаты точек изолюксы $e_v = \text{const}$, для которой, пользуясь правилом перпендикуляров, нетрудно найти, что

$$h_v = \sqrt{\frac{\varepsilon_h}{e_v} \text{tg } \vartheta}. \quad (142)$$

Из (141) и (142) следует, что при $e_h = e_v$

$$h_v = h_h \sqrt{\text{tg } \vartheta}. \quad (143)$$

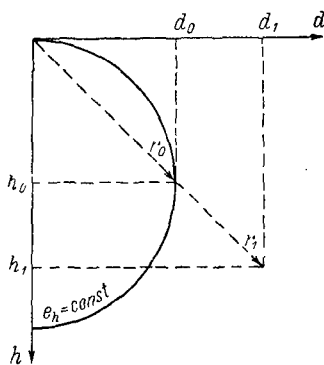


Рис. 31.

Поэтому пространственные изолюксы одинакового значения горизонтальной и вертикальной освещенности всегда пересекаются при $\vartheta = 45^\circ$.

Построение семейства изолюкс в обоих случаях упрощается, если сначала построить изолюксу $e = 1$ и воспользоваться соотношением (140). Согласно (141), при $\vartheta = \pi/2$ все линии $e_h = \text{const}$ проходят через начало координат, так как при этом $e_h = 0$ и $h = d = 0$. Это означает, что в таком направлении никакое значение e_h , кроме равного нулю, не может быть получено на конечном расстоянии от источника. Для линий $e_v = \text{const}$ то же следует из формулы (142) при $\vartheta = 0$.

Когда известно уравнение индикатрисы, легко составить уравнение пространственных изолюкс. Например, для косинусного источника [Л. 97] из (74) и (76) находим, что в полярных координатах r, ϑ , полюс которых совмещен с источником (см. рис. 24), уравнение изолюксы горизонтальной освещенности имеет вид:

$$r_h = \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{\pi e_h}}; \quad (144)$$

это — уравнение окружности, проходящей через источник и совмещенной с его осью диаметром, равным: $\frac{1}{\sqrt{\pi e_h}}$.

Так же находим уравнение изолюксы вертикальной освещенности:

$$r_v^2 = \frac{\sin 2\vartheta}{2\pi e_v}; \quad (145)$$

это — уравнение лемнискаты.

Согласно (143), находим точку пересечения изолюкс $e_h = e_v$, в которой, в данном случае, заданная вертикальная освещенность получается на наибольшем расстоянии от источника.

Для равномерного источника предложим графический способ построения пространственных изолюкс горизонтальной и вертикальной освещенности [Л. 49].

Световые приборы, принимаемые за симметричные точечные источники, дают огромное разнообразие индикатрис, причем здесь отличие от основных случаев законов Эйлера и Ламберта может быть значительно большим, чем у излучающих поверхностей и объемов.

Это относится в особенности к приборам с преломлятелями и зеркальными отражателями, в частности к прожекторам и к их группам, принимаемым за один прибор [Л. 307].

Для расчетов освещения полезно иметь уравнение индикатрисы [Л. 392]. В простейших случаях такое уравнение легко составить, зная свойства источника. Примеры такого рода — законы Эйлера и Ламберта или случай постоянной горизонтальной освещенности, когда, по (122),

$$f(\vartheta) = \sec^3 \vartheta. \quad (146)$$

Последний случай — простейший пример решения задачи о построении индикатрисы светильника, позволяющей получить в тех или иных условиях нужное распределение освещенности. Эта задача рассматривалась, с учетом действия нескольких светильников, уже в начале XX века [Л. 68, 76]. К ней вернулись впоследствии [Л. 117]; индикатрисы светильников стали строить также для соблюдения заданного соотношения между вертикальной освещенностью и горизонтальной [Л. 326].

Иногда индикатриса близка к эллипсу, проходящему через источник и совмещенному с осью последнего большей осью; тогда ее уравнение может быть написано в виде [Л. 45]:

$$f(\vartheta) = \frac{\cos \vartheta}{1 - (m^2 - 1) \sin^2 \vartheta},$$

где m — отношение большой и малой осей эллипса.

При $m=1$ эллипс обращается в круг, соответствующий закону Ламберта. Поэтому множитель, стоящий при $\cos \vartheta$ в последнем уравнении, можно рассматривать как коэффициент, учитывающий отступление от закона Ламберта.

Во многих случаях индикатриса выражается формулой Блонделя [Л. 56]

$$f(\vartheta) = \cos^m \vartheta. \quad (147)$$

Эта формула обобщает законы Ламберта ($m=1$) и Эйлера ($m=0$), а также уравнение (146), где $m=3$.

В некоторых случаях индикатриса выражается суммой двух членов вида (147), на что указал еще Бугер

[Л. 11]. Применяя разложение в ряд Фурье, можно составить уравнения практически всевозможных индикатрис в виде суммы косинусов кратных дуг [Л. 96, 361, 406]. Удобнее, как предложил Н. Г. Болдырев [Л. 232], пользоваться разложением

$$f(\vartheta) = a_0 + a_1 \cos \vartheta + a_2 \cos^2 \vartheta + \dots, \quad (148)$$

коэффициенты которого определяются по способу наименьших квадратов. Известны также приближенные приемы разложения индикатрис, в особенности предложенный Гаррисоном и Андерсоном [Л. 93].

Эквивалентный телесный угол симметричного источника определяется в зависимости от индикатрисы по (129). В случае индикатрисы вида (147) эквивалентный телесный угол

$$\Omega_m = \frac{2\pi}{m-1}. \quad (149)$$

Для разложения (148)

$$\Omega = \sum a_m \Omega_m, \quad (150)$$

где Ω_m — по (149), но m — целые и положительные числа.

Для построения кривой относительной освещенности по индикатрисе служат табл. 5 и 6.

Таблица 5

К построению кривой относительной освещенности по индикатрисе при постоянной разности углов ϑ

ϑ°	$\cos^3 \vartheta$	$\operatorname{tg} \vartheta$	—	—
5	0,988	0,087	0,000662	85
10	0,955	0,176	0,00524	80
15	0,901	0,268	0,0173	75
20	0,830	0,364	0,0400	70
25	0,744	0,466	0,0755	65
30	0,650	0,577	0,125	60
35	0,550	0,700	0,189	55
40	0,450	0,839	0,266	50
45	0,354	1,000	0,354	45
—	—	$\operatorname{ctg} \vartheta$	$\cos^3 \vartheta$	ϑ°

Таблица 6

К построению кривой относительной освещенности по индикатрисе при постоянных разностях $\operatorname{tg} \vartheta$ и $\operatorname{ctg} \vartheta$

$\operatorname{tg} \vartheta$	$\operatorname{ctg} \vartheta$	ϑ	$\cos^3 \vartheta$
0,25		14°02'	0,913
0,50		26°34'	0,715
0,75		36°52'	0,512
1,00	1,00	45°00'	0,354
	0,75	53°08'	0,216
	0,50	63°26'	0,0894
	0,25	75°58'	0,0143
	0,20	78°41'	0,00756

§ 19. Поверхности, равноосвещенные симметричными точечными источниками

Для построения равноосвещенной поверхности симметричного источника, принцип которого в общем виде впервые дал Штульман [Л. 30], достаточно рассмотреть ее образующую. Положим, что дуга образующей имеет вид, изображенный на рис. 32: углу ϑ с осью источника соответствует радиус-вектор r , а углу $\vartheta + d\vartheta$ — радиус-вектор $r + dr$. Проведем окружность радиуса r . Дуга этой окружности, заключенная между рассматриваемыми радиусами-векторами,

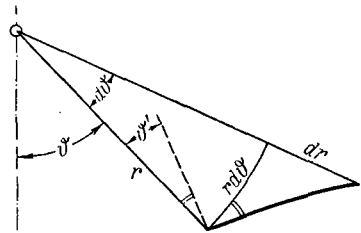


Рис. 32.

имеет длину $r d\vartheta$. Эту дугу можно рассматривать как катет треугольника, другой катет которого — приращение радиуса-вектора, а гипотенуза — дуга образующей. Острый угол, прилежащий катету $r d\vartheta$, равен углу падения ϑ' ; отсюда

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{dr}{r d\vartheta}.$$

С другой стороны, для равноосвещенной поверхности должно быть соблюдено условие

$$\frac{f(\vartheta)}{\Omega r^2} \cos \vartheta' = e_1,$$

где e_1 — постоянная освещенность; отсюда

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \pm \sqrt{\frac{[f(\vartheta)]^2}{\Omega^2 e_1^2 r^4} - 1}.$$

Приравнивая это найденному выше выражению $\operatorname{tg} \vartheta'$, находим [Л. 209]:

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \pm r \sqrt{\frac{[f(\vartheta)]^2}{\Omega^2 e_1^2 r^4} - 1}. \quad (151)$$

Из полученного дифференциального уравнения легко вывести два общих свойства равноосвещенных поверхностей.

Во-первых, все поверхности заключены внутри тела вращения около фотометрической оси, имеющего образующую

$$r = \sqrt{\frac{f(\vartheta)}{\Omega e_1}}; \quad (152)$$

поверхность этого тела ограничивает область вещественных значений r .

Во-вторых, в каждой точке указанной области имеет место пересечение двух разноосвещенных поверхностей, что показывает двойной знак в (151).

Уравнение образующей равноосвещенной поверхности будет решением дифференциального уравнения (151). Оно различно для разных источников света, т. е. для разных индикатрис, но и для каждого источника могут быть равноосвещенные поверхности, соответствующие общему и особому решениям уравнения (151). Например, в случае равномерного источника, это будет семейство поверхностей вращения лемнискат, пересекающихся в каждой точке внутри огибающей эти поверхности сферы [Л. 30, 31], также являющейся равноосвещенной поверхностью и вместе с тем границей вещественной области, определяемой уравнением (152).

Выясним, при каком условии уравнение образующей равноосвещенной поверхности совпадает с уравнением индикатрисы. Предположим, что

$$r = kf(\vartheta), \quad (153)$$

где $k = \frac{1}{\sqrt{\Omega e_1}}$ — постоянный множитель; тогда из (151)

$$d\vartheta = \pm \frac{df}{f \sqrt{\frac{1}{f^2} - 1}}. \quad (154)$$

Отсюда, после интегрирования,

$$\begin{aligned} \vartheta + C' &= \arcsin f(\vartheta); \\ f(\vartheta) &= \sin(\vartheta + C'); \end{aligned} \quad (155)$$

это — уравнение семейства окружностей единичного диаметра, проходящих через источник, причем центр каждой окружности лежит на линии, составляющей угол $C' = 0 \text{--} 90^\circ$ с направлением $\vartheta = 90^\circ$ (рис. 33). Особое решение уравнения (154) имеет вид:

$$f(\vartheta) = 1 \quad (156)$$

и представляет окружность, огибающую предыдущие. Таким образом, равноосвещенная поверхность совпадает с поверхностью фотометрического тела во всех случаях, когда индикатриса — окружность. Сюда

относятся косинусный источник — частный случай (155), а также равномерный — (156). Мавролико указал [Л. 2] случаи (155) и (156), не делая различия между законами излучения, к которым они относятся.

Для построения равноосвещенных поверхностей необходимо интегрировать уравнение (151), которое с этой целью удобно преобразовать подстановкой [Л. 344]:

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{d\vartheta} \ln f(\vartheta), \\ y &= \left\{ \frac{[f(\vartheta)]^2}{\Omega^2 e_1^2 r^4} - 1 \right\}^{-1/2}. \end{aligned}$$

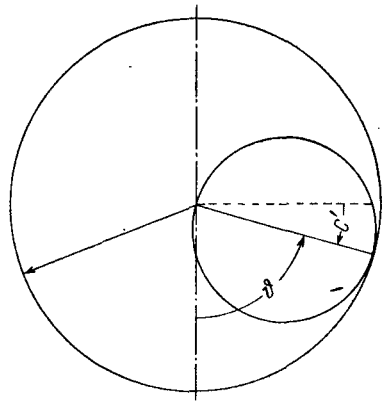


Рис. 33.

Тогда оно приводится к виду:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2 - v} y^3 - \frac{2}{x^2 - v} y^2 + \frac{x}{x^2 - v} y - \frac{2}{x^2 - v}, \quad (157)$$

где

$$v = \frac{1}{f(\vartheta)} \cdot \frac{d^2 f(\vartheta)}{d\vartheta^2}.$$

Таким образом, в общем случае v — функция переменной x , и дифференциальное уравнение образующей равноосвещенной поверхности является первого рода уравнением Абеля, в котором коэффициенты при обеих нечетных степенях y одинаковы, как и при обеих четных. Вследствие такой особенности коэффициентов уравнения (157), оно имеет очевидное частное решение:

$$y_1 = \pm i. \quad (158)$$

Рассмотрим интегрирование уравнения (157) в случае косинусного источника, когда

$$f(\vartheta) = \cos \vartheta.$$

При этом

$$v = -1; \quad x = -\operatorname{tg} \vartheta.$$

Пусть численное значение освещенности

$$e_1 = \frac{1}{\Omega};$$

тогда

$$y = \left(\frac{\cos^2 \vartheta}{r^2} - 1 \right)^{-1/2}. \quad (159)$$

Из (153) и (155), полагая $C' = \pi/2$ и $k=1$, находим еще одно частное решение:

$$r = \cos \vartheta, \quad (160)$$

что после подстановки в (159) дает:

$$y = \pm \operatorname{ctg} \vartheta = \mp \frac{1}{x}.$$

Здесь надо взять нижний знак, чтобы решение удовлетворяло уравнению (157). Следовательно, второе частное решение имеет вид:

$$y_2 = \frac{1}{x}. \quad (161)$$

Пользуясь частными решениями (158) и (161), находим подстановку

$$w = \frac{x + y}{xy - 1},$$

приводящую (157) к

$$\frac{dx}{dw} = \frac{1 - xw}{w^2 - 1}.$$

Отсюда, после интегрирования, находим следующее уравнение образующей равноосвещенной поверхности косинусного источника:

$$\frac{1 + r^2 \pm \operatorname{tg} \vartheta \sqrt{\cos^2 \vartheta - r^4}}{\pm \sqrt{\cos^2 \vartheta - r^4} - r^2 \operatorname{tg} \vartheta} \exp \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\pm \sqrt{\cos^2 \vartheta - r^4} - r^2 \operatorname{tg} \vartheta} = C. \quad (162)$$

Придавая различные значения постоянной C , можно получить множество равноосвещенных поверхностей, одной из которых (при $C \rightarrow \infty$) является, как известно [Л. 84], сфера, определяемая уравнением (160). Все эти поверхности находятся в вещественной области, ограниченной, согласно (152), поверхностью с образующей

$$r = \sqrt{\cos \vartheta}. \quad (163)$$

Равноосвещенные поверхности получили некоторые применения в архитектуре [Л. 194].

§ 20. Наивыгоднейшее расположение точечных источников

Задача о наивыгоднейшем расположении точечного источника, при котором освещенность, создаваемая им на заданном расстоянии, максимальна, была, насколько известно, первой задачей теоретической фотометрии, которая рассматривалась для целей техники освещения в XVIII веке [Л. 15]. До появления следующих работ по расчету освещения от точечных источников прошло, по-видимому, около ста лет [Л. 27, 32], что объясняется медленностью развития искусственного освещения до начала применения электрических ламп накаливания.

С первых работ по расчету электрического освещения началось усиленное развитие фотометрии точечных источников с различного вида индикатрисами. Теперь к задаче о наивыгоднейшем расположении источников обратился В. Н. Чиколев [Л. 41]. Разработка теории

этого вопроса продолжалась в дальнейшем [Л. 88, 91, 221]. Стали исследовать также условия получения равномерного освещения и желательного распределения освещенности [Л. 68, 76, 78, 196, 270]. Впоследствии были предложены способы оценки светильников с этих точек зрения [Л. 188, 241].

Пользуясь пространственными изолюксами, легко выяснить, какова должна быть одна из координат d , h при заданной другой, чтобы освещенность была наибольшей. Обращаясь к рис. 34, найдем, например, что на расстоянии d' максимум e_v будет при

$$h' = d' \operatorname{ctg} \vartheta_{vh},$$

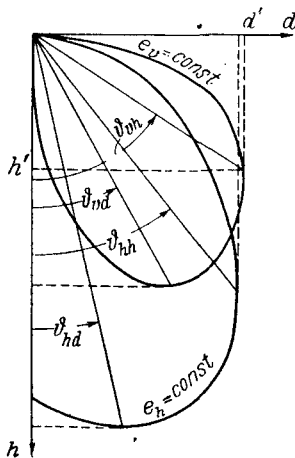


Рис. 34.

где ϑ_{vh} соответствует точке максимума координаты d изолюксы, т. е. точке, в которой ордината при d' служит касательной к кривой некоторого значения $e_v = \text{const}$. Действительно, заметим, что во всех точках чертежа, лежащих вне этой изолюксы, т. е. на расстояниях от источника, по соответствующим направлениям больших, чем расстояния до ее точек, освещенности должны быть

меньше e_v . Следовательно, точка d' , h' — единственная при $d = d'$, где освещенность равна, а не меньше e_v , т. е. имеет максимум.

Вследствие соотношения (140) максимумы всех изолюкс (т. с. при всех значениях e_r) находятся на одном и том же направлении под углом ϑ_{vh} . На рис. 34 показано по тому же способу определение угла ϑ_{vd} , при котором e_v максимальна для заданного h , а также углов ϑ_{hh} и ϑ_{hd} , характеризующих условие максимума e_h при заданных d и h . Углы ϑ_h и ϑ_d , служащие для разыскания h и d при заданных d или h , в общем случае неодинаковы и зависят от вида изолюксы, а в конечном счете от индикатрисы источника. Таким образом, может быть четыре значения угла ϑ , характеризующих в разных случаях условие максимума

освещенности плоскостей, параллельной и перпендикулярной фотометрической оси симметричного источника

Характерные значения угла ϑ можно получить также из исследования выражения освещенности, например (122) [Л. 172], из уравнений пространственных изолюкс, когда эти уравнения известны, или находя максимум освещенности с помощью уравнения индикатрисы. Например, для косинусного источника углы, определяющие максимум горизонтальной освещенности, имеют очевидные значения $\vartheta_{hh}=45^\circ$ и $\vartheta_{hd}=0^\circ$, так как пространственная изолюкса горизонтальной освещенности — окружность (144). Вертикальная освещенность от такого источника

$$e_v = \frac{\cos \vartheta \sin^3 \vartheta}{\pi d^2}$$

или

$$e_v = \frac{\sin \vartheta \cos^3 \vartheta}{\pi h^2}.$$

Из условия

$$\frac{de_v}{d\vartheta} = 0$$

и первого из этих выражений находим $\vartheta_{vh}=60^\circ$, а из второго так же получаем $\vartheta_{vd}=30^\circ$.

Наивыгоднейшее расположение источника можно определять также из условия максимума потока, падающего от него на те или иные фигуры [Л. 59]. При этом удобно пользоваться кривой потока. Существуют особые приемы решения сложной задачи наивыгоднейшего расположения многих осветительных приборов в разных случаях освещения, в частности прожекторного [Л. 342]. Разработаны также приемы, позволяющие выбирать наивыгоднейшее расположение светильников с учетом их экономичности [Л. 372].

§ 21. Некоторые случаи расчета светового потока

Расчет потока, падающего от симметричного точечного источника на произвольную поверхность, часто удобно производить, заменяя эту поверхность плоскостью, перпендикулярной оси источника и видимой из него под тем же телесным углом [Л. 17].

Простой путь решения этой задачи — графический, по способу Руссо. Положим, что дан некоторый контур на плоскости, перпендикулярной фотометрической оси (рис. 35). Взяв из этой плоскости тонкое кольцо, образованное приращением $d\vartheta$ угла ϑ , видим, что через контур проходит не весь зональный поток dF_ϑ , соответствующий углу $d\vartheta$, а лишь часть этого потока, падающая на заштрихованную на рисунке часть кольца, определяемую углом α_ϑ . Эта часть приблизительно равна

$$\frac{\alpha_\vartheta}{2\pi} dF_\vartheta.$$

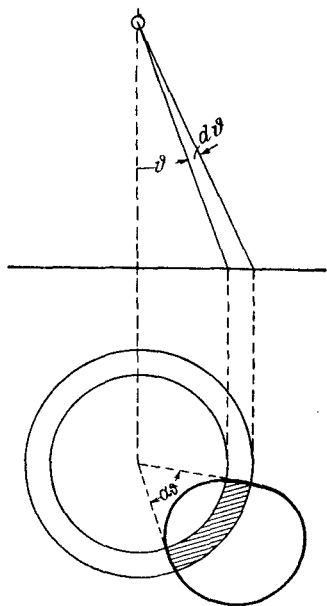


Рис. 35.

Тогда ее можно найти по кривой Руссо [Л. 121], умножив на α_ϑ (в радианах) площадь $d\sigma$, пропорциональную потоку dF_α . Если для каждого значения ϑ уменьшить ординаты кривой Руссо пропорционально отношению $\alpha_\vartheta/2\pi$ (связь углов α и ϑ дана контуром), то получаемая кривая выделит площадь, пропорциональную искомому потоку через контур. Если контур — окружность, через центр которой проходит фотометрическая ось источника, то $\alpha_\vartheta = 2\pi$ для всех $\vartheta < \vartheta_0$ и $\alpha_\vartheta =$

$= 0$ для всех $\vartheta > \vartheta_0$, где ϑ_0 — угол, под которым радиус окружности виден из источника. Измерив площадь σ_0 , т. е. часть площади кривой Руссо от $z=0$ до $z=z_0$, где $z_0 = 1 - \cos \vartheta_0$, получим поток, падающий на круг, как произведение $2\pi\sigma_0$.

Рассмотрим более общий случай, в котором фотометрическая ось источника пересекает плоскость кругового контура на расстоянии ξ от центра окружности, имеющей радиус x . Все расстояния будем считать выраженными их отношениями к высоте расположения

источника над освещаемой плоскостью, принимаемой за единицу.

Построив на освещаемой плоскости окружность, имеющую центр в точке пересечения фотометрической оси источника с этой плоскостью и радиус $|x - \xi|$ (рис. 36), найдем значения α_ϑ , приведенные в табл. 7, где

$$\beta = \arccos \left(\pm \frac{x^2 - \xi^2 - \operatorname{tg}^2 \vartheta}{2\xi \operatorname{tg} \vartheta} \right),$$

причем верхний знак — для $\xi < x$ (рис. 36), нижний — для $\xi \geq x$.

Искомый коэффициент связи

$$\begin{aligned} \varphi(x, \xi) &= \\ &= \frac{1}{\Omega} \int_0^{\arctg(x+\xi)} \alpha_\vartheta f(\vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta, \end{aligned} \quad (164)$$

где $f(\vartheta)$ — индикатриса источника, имеющего эквивалентный телесный угол Ω .

Поток точечного источника через круг может быть вычислен также посредством эллиптических интегралов. Этот метод разработан и для вычисления потока через эллиптический контур [Л. 166].

Если контур — прямоугольник, отношения сторон которого к расстоянию от источника до его плоскости

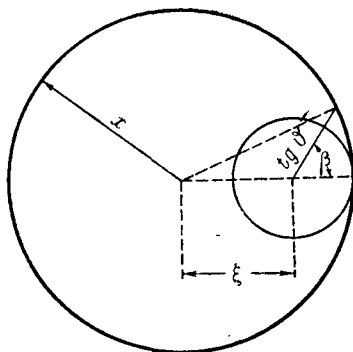


Рис. 36.

Таблица 7

К расчету светового потока точечного источника через круг

ϑ	α_ϑ	
	$\xi < x$	$\xi \geq x$
$0 \leq \vartheta \leq \arctg x - \xi $	2π	0
$\arctg x - \xi \leq \vartheta \leq \arctg(x + \xi)$	$2(\pi - \beta)$	2β

равны x и y (расстояние от источника до плоскости контура принимаем за единицу), причем источник расположен над одной из вершин прямоугольника, а $x < y$, то (рис. 37)

$$\alpha_{\vartheta} = \frac{\pi}{2} \quad \text{при } \vartheta = 0 \div \vartheta_1,$$

$$\alpha_{\vartheta} = \arcsin(x \operatorname{ctg} \vartheta) \quad \text{при } \vartheta = \vartheta_1 \div \vartheta_2,$$

$$\alpha_{\vartheta} = \arcsin(x \operatorname{ctg} \vartheta) - \arccos(y \operatorname{ctg} \vartheta) \quad \text{при } \vartheta = \vartheta_2 \div \vartheta_3,$$

где

$$\vartheta_1 = \operatorname{arctg} x;$$

$$\vartheta_2 = \operatorname{arctg} y;$$

$$\vartheta_3 = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

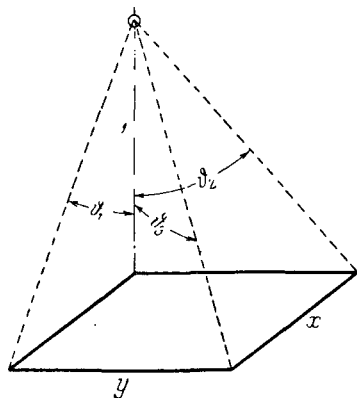


Рис. 37.

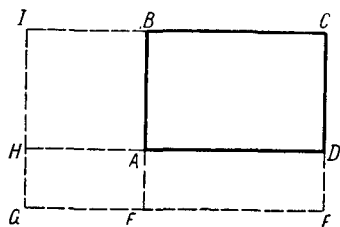


Рис. 38

Эти соотношения позволяют определять поток от точечного источника через прямоугольник, плоскость которого перпендикулярна фотометрической оси источника, и при других расположениях. Если, например, нужно вычислить поток через прямоугольник $ABCD$, плоскость которого пересекает фотометрическую ось в точке G (рис. 38), то, построив дополнительные прямоугольники $ADEF$, $AFGH$ и $AHIB$, найдем, что искомый поток

$$F_{ABCD} = F_{CEGI} - F_{DEGH} - F_{BFGI} + F_{AFGH}, \quad (165)$$

где все четыре потока, стоящие справа, относятся к такому же расположению источника относительно освещаемого прямоугольника, как показанное на рис. 37.

Когда одна из сторон прямоугольника, например y , стремится к бесконечности, может быть найден световой поток, падающий на бесконечно простирающуюся по одну сторону от источника полосу шириной x . Для этого нужно положить:

$$\alpha_{\vartheta} = \frac{\pi}{2} \quad \text{при } \vartheta = 0 \div \vartheta_1;$$

$$\alpha_{\vartheta} = \arcsin(x \operatorname{ctg} \vartheta) \quad \text{при } \vartheta = \vartheta_1 \div \frac{\pi}{2};$$

$$\alpha_{\vartheta} = 0 \quad \text{при } \vartheta > \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда коэффициент связи источника с полосой ширины x и бесконечной длины, пад одним из краев которой источник расположен на единичной высоте,

$$\varphi(x) = \frac{2}{\Omega} \int_0^{\pi/2} \alpha_{\vartheta} f(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta, \quad (166)$$

где $f(\vartheta)$ и Ω — индикатриса и эквивалентный телесный угол точечного источника (фотометрическая ось источника перпендикулярна полосе), а α_{ϑ} имеет указанные выше значения (вследствие чего этот угол удвоен).

Если $\sigma(x)$ — площадь кривой, получаемой при умножении ординат кривой Руссо, т. е. зональных потоков, на α_{ϑ}/π , то

$$\varphi(x) = 2\pi \frac{\sigma(x)}{\Omega}. \quad (167)$$

Рассмотрим еще применение этого способа к вычислению светового потока, падающего на круг в плоскости, параллельной оси источника, причем источник находится на нормали к этой плоскости в центре круга. Если y — отношение радиуса круга к расстоянию от источника до освещаемой плоскости (т. е. до центра круга), то уравнение рассматриваемой окружности в координатах α, ϑ будет:

$$\operatorname{cosec} \vartheta = \sqrt{1 + y^2} \cos \alpha.$$

Определив отсюда угол α , нужно его удвоить, чтобы найти часть зоны $d\vartheta$, лучи которой падают на круг. Таким образом,

$$\alpha_{\vartheta} = 2 \arccos \frac{\operatorname{cosec} \vartheta}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Решение этой задачи по способу Руссо было указано Д. А. Куприяновым [Л. 153].

Не пользуясь построением Руссо, можно решать аналогичные задачи, суммируя части зональных потоков, определяемые в зависимости от телесного угла, в пределах которого нужно вычислить поток, или от размеров и расположения освещаемого контура [Л. 88, 113, 205]. Коэффициент k_{ϑ} , на который при этом нужно умножать зональный поток, составляет либо как отношение соответственных телесных углов, либо как отношение площадей на освещаемой плоскости, перпендикулярной оси источника. В первом случае расчет будет вполне точным для равномерного источника, во втором — для источника с индикатрисой вида (146). Для всех других индикатрис эти способы приближены, но результат тем точнее, чем уже зоны.

Например, для вычисления светового потока, попадающего в двугранный угол β от источника, находящегося на линии пересечения граней, ось которого перпендикулярна одной из них (рис. 39), доля зонального потока, определяемая отношением телесных углов, по формуле П. М. Тиходеева [Л. 226]

$$k_{\vartheta} = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \vartheta}.$$

Весьма упрощается вычисление светового потока от равномерного источника. В этом случае коэффициент связи источника с какой-либо поверхностью

$$\varphi = \frac{\omega}{4\pi}, \quad (168)$$

где ω — телесный угол, под которым из источника видна освещаемая поверхность. Поэтому поток здесь

может быть вычислен с помощью соотношений сферической тригонометрии.

Коэффициент связи равномерного источника, расположенного на единичной высоте над одной из вершин прямоугольника со сторонами x и y (рис. 37) [Л. 217],

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \operatorname{arctg} \frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}. \quad (169)$$

Полагая $y \rightarrow \infty$ и удваивая результат, отсюда получаем коэффициент связи равномерного источника с полосой бесконечной длины, над одним из краев которой этот источник расположен на единичной высоте:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} x. \quad (170)$$

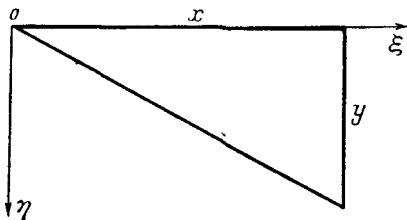


Рис. 40.

Это выражение легко получить непосредственно, как отношение телесного угла, опирающегося на полосу, к 4π .

В некоторых задачах решение упрощается заменой сложных контуров более простыми, ограничивающими площади, эквивалентные искомым. Таким образом, например, вычисление потока, падающего на квадрат, можно свести к такому же вычислению для круга [Л. 344].

Рассмотрим еще точечный источник, расположенный на единичном расстоянии над вершиной o прямоугольного треугольника с катетами x и y (рис. 40). Ось источника примем перпендикулярной плоскости треугольника. Если пользоваться в качестве характеристики источника коэффициентом освещенности ε_h , то коэффициент связи источника с таким треугольником удобно вычислять в прямоугольных координатах ξ , η , начало которых — в точке o :

$$\varphi_t = \int_0^x d\xi \int_0^{\frac{y}{x}\xi} \varepsilon_h d\eta; \quad (171)$$

здесь ε_h — функция $\operatorname{tg} \vartheta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

Зная φ_t , легко подсчитать коэффициенты связи с прямоугольниками, перпендикулярными и параллельными фотометрической оси источника. Поменяв местами x и y в последнем выражении и прибавив результат к предыдущему, найдем коэффициент связи φ_{xy} с прямоугольником, имеющим стороны x и y , над одной из вершин которого расположен источник. Положим да-

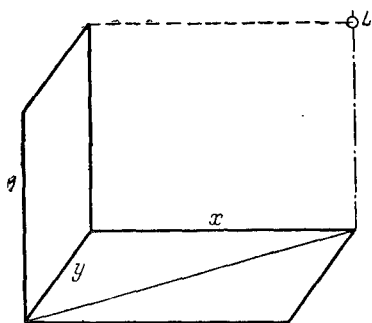


Рис. 41.

лее, что на стороне y этого прямоугольника построен в перпендикулярной ему плоскости прямоугольник единичной высоты, находящийся на расстоянии x от источника L и параллельный фотометрической оси последнего (рис. 41).

Обозначим через φ_{\cup} коэффициент связи источника с полусферой, окружающей его в пределах $\vartheta = 0 \div 90^\circ$ (для излучающей площадки

$\varphi_{\cup} = 1$). Тогда коэффициент связи с рассматриваемым прямоугольником

$$\varphi_{y1} = \frac{\varphi_{\cup}}{2\pi} \arctg \frac{y}{x} - \varphi_t, \quad (172)$$

где φ_{\cup} определяется по формуле (137).

Существуют способы расчета освещенности, основанные на вычислении светового потока [Л. 72].

§ 22. Несимметричные источники

Для изображения распределения света несимметричного источника посредством характеристик, применяемых для симметричных точечных источников, нужен ряд кривых, соответствующий ряду положений меридиональной (проходящей через фотометрическую ось) плоскости, характеризуемых углом α (см. рис. 15). Это неудобно даже в том случае, когда источник обладает плоскостями симметрии, вследствие чего число необходимых кривых уменьшится.

Более совершенный способ — применение линий

равных сил света (так называемых изосвеч) на шаровой поверхности, имеющей источник в центре. Такие линии соединяют точки шара, в направлении на которые значения силы света или $f(\alpha, \vartheta)$ одинаковы. Задача сводится к тому, чтобы изобразить на плоскости шаровую поверхность с изосвечами в координатах α, ϑ . Это задача картографии, где известны два основных вида проекции сферы на плоскость — равноугольная (или конформная) и равновеликая. Свойство равноугольных проекций — сохранять подобие очертаний, свойство равновеликих — сохранять масштаб, одинаковый по всей площади проекции.

Для целей фотометрии ценны свойства равновеликих проекций. Действительно, световой поток пропорционален произведению силы света на телесный угол, измеряемый шаровой поверхностью. Поэтому, если площадь проекции будет повсюду пропорциональна последней, то будет легко вычислять поток, нанося на карте изосвеч очертания телесных углов, опирающихся на освещаемые поверхности. С другой стороны, сохранение очертаний изосвеч не имеет существенного значения. Поэтому для изображения изосвеч от несимметричных источников применяют равновеликие проекции [Л. 408].

Положим, что x, y — прямоугольные координаты на плоскости проекции, связанные с координатами α, ϑ формулами перехода

$$x = f_1(\alpha, \vartheta);$$

$$y = f_2(\alpha, \vartheta);$$

тогда

$$dx dy = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial y}{\partial \vartheta} - \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) d\alpha d\vartheta.$$

Сохранение масштаба требует, чтобы

$$m dx dy = d\omega,$$

где m — коэффициент пропорциональности.

Пользуясь выражением (2) телесного угла $d\omega$, находим:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial y}{\partial \vartheta} - \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{\sin \vartheta}{m}; \quad (173)$$

это — условие, которому должны удовлетворять формулы перехода.

На рис. 42 показана синусоидальная проекция [Л. 213] Сансона, введенная в фотометрию Бенфордом [Л. 111]. По оси Ox отложен угол α . Если вертикальный размер проекции обозначить через a , то

$$a = \pi.$$

Горизонтальные прямые — линии равных ϑ . Линии равных α — синусоиды, соединяющие полюсы проекции

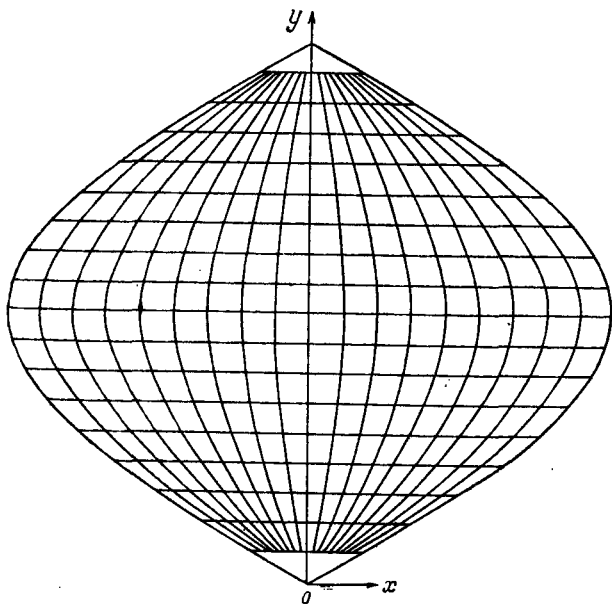


Рис. 42.

и делящие на равные части прямые равных ϑ . Горизонтальный размер проекции также равен a . Таким образом,

$$y = \frac{a}{\pi} \vartheta,$$

$$x = \frac{a}{2\pi} \alpha \sin \vartheta.$$

Вычислив производные, найдем, что условие (173) удовлетворено, если

$$m = 2 \frac{\pi^2}{a^2}.$$

Другой употребительный вид равновеликой проекции — изоцилиндрическая, предложенная Ламбертом [Л. 16] для картографических целей. Она изображена на рис. 43 и имеет вид квадрата со стороной a . Горизонтальные прямые — линии равных ϑ , вертикальные — равных α . Здесь

$$x = \frac{a}{2\pi} \alpha;$$

$$y = a \frac{1 - \cos \vartheta}{2}.$$

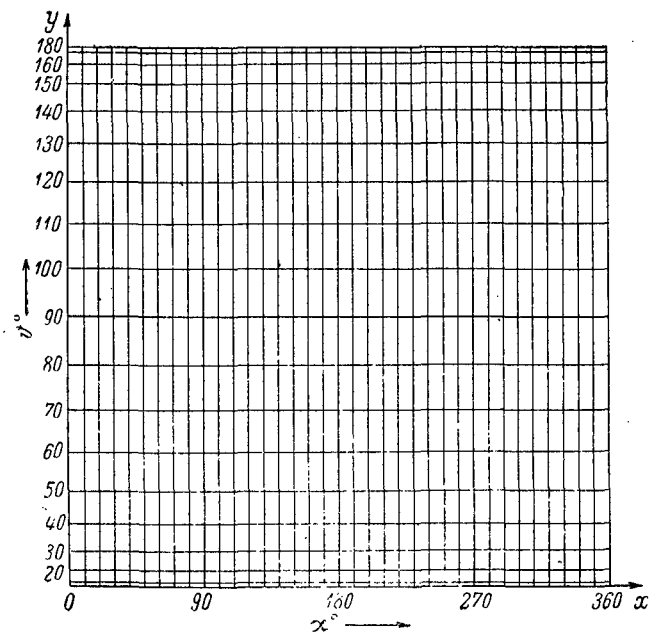


Рис. 43.

Построенная в таком виде [Л. 246] изоцилиндрическая диаграмма позволяет представить проекцию всей сферы. Нетрудно убедиться, что условие (173) здесь также удовлетворено, для чего следует положить

$$m = \frac{4\pi}{a^2}.$$

Если некоторая площадь на проекции равна s [см²], то соответствующий телесный угол

$$\omega = ms \text{ [стер]},$$

где m должно быть выражено в стерадианах на квадратный сантиметр. Этот телесный угол можно разбить на участки сообразно расположению изосвеч. Умножение сил света на соответствующие площади даст световой поток, падающий на контур, видимый из источника под телесным углом ω .

Нанесение на проекцию контуров освещаемых поверхностей облегчает и определение сил света для расчета освещенности [Л. 181], выполняемое по обычным соотношениям между углами и расстояниями. Для расчета освещенности и светового потока от несимметричных источников предложены и другие приемы [Л. 222, 316].

Линии изосвеч на сфере представляют вместе с тем изолюксы на той же поверхности. Возможно взять и другую поверхность, чтобы изолюксами на ней характеризовать источник [Л. 198]. Если строить изолюксы на плоскости, перпендикулярной фотометрической оси источника и отстоящей от него на расстоянии, равное единице, то получатся относительные изолюксы, также связанные с кривой относительной освещенности, как изосвеча—с кривой силы света. В случае симметричного источника, эти изолюксы—концентрические окружности.

Относительные изолюксы строят и на других плоскостях, в частности параллельной оси источника [Л. 206]. Они представляют значительные преимущества во многих случаях расчета, в частности для расчета прожекторного освещения, куда их ввел В. В. Мешков [Л. 162]. Существуют и другие способы изображения распределения света несимметричных источников [Л. 265].

В рассмотренных проекциях могут быть представлены также линии $f(\alpha, \vartheta) = \text{const}$. Тогда эквивалентный телесный угол несимметричного источника можно найти по (130) с помощью планиметрирования. По таким проекциям вычисляется и коэффициент связи несимметричного источника с какой-либо поверхностью—аналогично (70), графическим интегрированием в пределах проекции контура освещаемой поверхности.

Индикатрисы несимметричных источников описывают также с помощью рядов Фурье [Л. 361].

ИЗЛУЧАЮЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ И ЛИНИИ

§ 23. Общие соображения

В классической фотометрии обычно рассматривали расчет освещения от поверхностей, излучающих по закону Ламберта. По уже выясненным физическим причинам (§ 11) от этого закона всегда наблюдаются более или менее значительные отступления. Поэтому заслуживает внимания вопрос об освещении от поверхностей, излучающих по другим законам. Практическое значение этой проблемы выявилось в астрономии [Л. 42], светотехнике [Л. 152, 286, 288, 291] и теплотехнике [Л. 341].

Ниже рассмотрен расчет освещенности и светового потока от источников конечных размеров, имеющих индикатрису любого вида, симметричную относительно нормали. Такая индикатриса может быть задана графиком функции $f(\vartheta)$, полученным экспериментально, или разложением этой функции в ряд (148). В последнем случае световое поле реальной излучающей поверхности, имеющей светность R , будет суперпозицией полей таких же геометрических поверхностей с индикатрисами вида (147) при целом и положительном m и светностями

$$R_m = a_m \frac{\Omega_m}{\Omega} R,$$

где Ω_m и Ω — определяются формулами (149) и (150).

В расчетах освещения имеет важное значение положение источников и освещаемых поверхностей. Есть ряд положений, при которых расчет значительно проще. Эти положения можно назвать простыми. Они характеризуются параллельностью или перпендикулярностью осей, сторон, нормалей, главных сечений и других направлений и плоскостей, связанных с источниками и освещаемыми поверхностями. С другой стороны, сделав расчет для одного или нескольких простых расположений, обычно можно тем или иным способом перейти от них к расчету для поверхности, не находящейся с источником в простом расположении.

С этой точки зрения во всевозможных задачах теоретической фотометрии важно выбрать:

- 1) способ расчета для простых расположений;
- 2) способ перехода от простых расположений к другим.

В случаях простых расположений излучающая и освещаемая поверхности могут иметь удобные уравнения в одной и той же системе координат. Этим облегчается вычисление коэффициентов освещенности и связи.

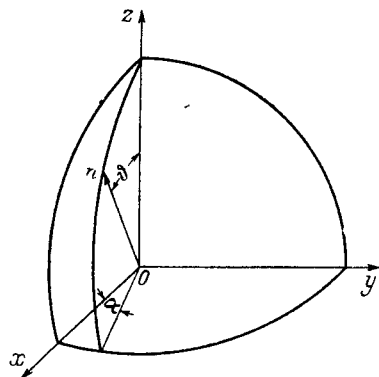


Рис. 44.

В общем случае поставленная задача решается разысканием светового вектора. Световой вектор всегда можно найти по трем его проекциям. Если эти проекции удастся вычислить как освещенности в простых расположениях, то тем самым получается и переход к другим расположениям [Л. 60]. Так, если E_x , E_y и E_z — освещенности плоскостей yOz , xOz и xOy (рис. 44) в точке O , т. е. проекции светового вектора в этой точке на оси Ox , Oy и Oz , то освещенность плоскости, направление нормали n к которой определяется углами α и ϑ [Л. 258], будет:

$$E_n = E_x \sin \vartheta \cos \alpha + E_y \sin \vartheta \sin \alpha + E_z \cos \vartheta. \quad (174)$$

В некоторых исследованиях целесообразно разложение вектора и на большее число составляющих [Л. 136]. При этом всегда необходимо вычислять составляющие, как и сам вектор, лишь от источников или частей излучающих поверхностей, расположенных по одну сторону плоскости, к которой относится искомая освещенность (§ 13) [Л. 239]. Иногда бывает известна плоскость вектора, тогда можно составить выражение освещенности для произвольной плоскости, перпендикулярной первой, и найти направление вектора из условия ее максимума, взяв производную освещенности по углу поворота освещаемой плоскости [Л. 66]. Наконец, в отдельных случаях направление светового вектора может быть найдено непосредственно из соображений симметрии [Л. 106]; тогда достаточно вычислить только одну его проекцию, относящуюся к какому-либо из простых расположений.

Когда поле имеет квазипотенциал [Л. 217, 295], световой вектор в каждой точке поля может быть получен с помощью скалярных функций координат этой точки — квазипотенциала W и интегрирующего множителя μ . Обозначая через ξ, η, ζ координаты точки поля, имеем, согласно (109), следующие выражения проекций светового вектора на оси Ox, Oy и Oz :

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial W}{\partial \xi}; \\ E_y &= -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial W}{\partial \eta}; \\ E_z &= -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial W}{\partial \zeta}. \end{aligned} \right\} \quad (175)$$

При наличии потенциала эти проекции получим, поставив его здесь на место квазипотенциала и положив $\mu=1$.

§ 24. Принцип обратимости

Уравнение (82) выражает принцип обратимости¹, согласно которому, при некоторых условиях, поток, падающий с излучающей поверхности на освещаемую, не изменяется, когда освещаемая поверхность становится излучающей, а излучающая — освещаемой. Этот принцип был установлен Ламбертом [Л. 12] для равнорких поверхностей, но он может быть обобщен и на некоторые другие случаи.

Рассмотрим излучающую поверхность s_1 и освещаемый элемент ds_2 (рис. 6). Коэффициент освещенности элемента ds_2 , по (64),

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\Omega_1} \int_{s_1} \frac{f_1(\vartheta_1)}{r^2} \cos \vartheta_2 ds_1, \quad (176)$$

где Ω_1 — эквивалентный телесный угол излучающей поверхности, а $f_1(\vartheta)$ — ее индикатриса (предполагаемая симметричной и одинаковой по всей поверхности s_1).

¹ Иногда называемый теоремой взаимности.

Положим теперь, что излучает элемент ds_2 , имея симметричную индикатрису $f_2(\vartheta)$ и эквивалентный телесный угол Ω_2 . Он создает на элементе ds_1 поверхности s_1 освещенность, равную $\varepsilon_1 R_2$, где коэффициент освещенности

$$\varepsilon_1 = \frac{\cos \vartheta_1}{\Omega_2 r^2} f_2(\vartheta_2) ds_2,$$

а R_2 — светность.

Световой поток, падающий на ds_1 , равен $\varepsilon_1 R_2 ds_1$, а на всю поверхность s_1 :

$$\frac{R_2 ds_2}{\Omega_2} \int_{s_1} \frac{f_2(\vartheta_2)}{r^2} \cos \vartheta_1 ds_1.$$

Принимая во внимание, что полный световой поток элемента ds_2 равен $R_2 ds_2$, находим коэффициент связи ds_2 с s_1 :

$$\varphi_1 = \frac{1}{\Omega_2} \int_{s_1} \frac{f_2(\vartheta_2)}{r^2} \cos \vartheta_1 ds_1. \quad (177)$$

Сходство этого выражения с (176) [Л. 90] позволяет заметить, что

$$\varphi_1 \Omega_2 = \varepsilon_2 \Omega_1, \quad (178)$$

когда элемент ds_2 является (в общем случае) несимметричным источником, для которого значение индикатрисы в направлении к ds_1

$$f_2(x, \vartheta_2) = f_1(\vartheta_1) \frac{\cos \vartheta_2}{\cos \vartheta_1}, \quad (179)$$

где $f_1(\vartheta_1)$ — индикатриса симметрично излучающего элемента ds_1 ; при этом Ω_2 вычисляется по (130).

Пусть ds_1 находится в точке P_1 (рис. 45), Π — касательная к нему плоскость, пересекающая по линии OO перпендикулярную ей меридиональную плоскость источника ds_2 , находящегося в точке P_2 ; от последней плоскости будем отсчитывать азимут α , а угол между плоскостью, касательной к ds_2 , и плоскостью Π обозначим через γ . Пользуясь сферической тригонометрией, нетрудно найти, что

$$\cos \vartheta_1 = \sin \gamma \cos \alpha \sin \vartheta_2 + \cos \gamma \cos \vartheta_2.$$

На основании последнего соотношения может быть определена $f_2(\alpha, \vartheta_2)$ по (179). В частном случае, когда s_1 — плоскость, параллельная ds_2 , $\gamma=0$ и

$$\vartheta_1 = \vartheta_2;$$

тогда

$$\varepsilon_2 = \varphi_1$$

при совпадении вида функций $f_1(\vartheta)$ и $f_2(\vartheta)$, вследствие чего $\Omega_1 = \Omega_2$. Точечный источник, заменяющий элемент ds_2 , находящийся в точке P_2 , получится симметричным еще в случае, когда s_1 — поверхность вращения около оси P_2O и $\vartheta_1 = \gamma - \vartheta_2$.

Световой поток, падающий на ds_2 от поверхности s_1 , имеющей светность R_1 ,

$$dF_{12} = \varepsilon_2 R_1 ds_2;$$

отсюда, по (178),

$$dF_{12} = \varphi_1 \frac{\Omega_2}{\Omega_1} R_1 ds_2 = \varphi_1 \Omega_2 B_{01} ds_2,$$

где B_{01} — яркость поверхности s_1 по нормали.

Световой поток, падающий на s_1 от ds_2 ,

$$dF_{21} = \varphi_1 R_2 ds_2 = \varphi_1 \Omega_2 B_{02} ds_2,$$

где B_{02} — яркость элемента ds_2 по нормали. Следовательно,

$$dF_{12} = dF_{21}$$

при $B_{01} = B_{02}$.

Итак, принцип обратимости соблюдается при равенстве яркостей в направлении нормали и при условии (179), частными случаями которого являются закон Ламберта и симметрично и одинаково излучающие фигуры в параллельных плоскостях.

При условиях соблюдения принципа обратимости, коэффициент связи площадки с поверхностью выражается через коэффициент освещенности площадки от поверхности согласно (178). Следовательно, вычисление освещенности некоторой площадки от излучающей

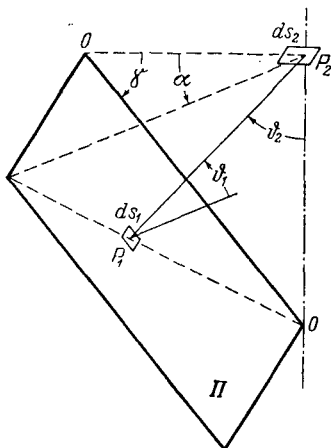


Рис. 45.

поверхности можно свести к вычислению светового потока, падающего на эту поверхность от точечного источника (фотометрическая ось которого совпадает с нормалью к площадке), связанного с излучающей поверхностью условием (179). Такой точечный источник будет излучать симметрично, с индикатрисой излучающей поверхности, когда последняя подчиняется закону Ламберта или является параллельной освещаемой площадке плоскостью, излучающей равномерно по всей площади и симметрично относительно нормали [Л. 175, 201]; в этих частных случаях коэффициент связи точечного источника с поверхностью равен коэффициенту освещенности, получаемой от этой поверхности в точке источника, на плоскости, перпендикулярной его оси. Поэтому получаемый из (171) коэффициент связи симметричного точечного источника L , излучающего только в нижней полусфере, с прямоугольни-

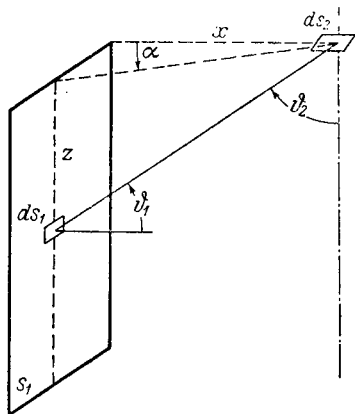


Рис. 46.

ком xy (рис. 41) численно равен коэффициенту освещенности параллельной прямоугольной площадки в точке L , освещенной прямоугольником xy , излучающим по тому же закону, что и источник L .

В общем случае уравнение (178) позволяет свести расчет коэффициента освещенности от излучающей поверхности к расчету коэффициента связи несимметричного источника с той же поверхностью, который всегда может быть найден по линиям $f(\alpha, \vartheta)$ в синусоидальной или изоцилиндрической проекции (§ 22).

Особый интерес представляет случай

$$\gamma = \frac{\pi}{2}$$

для излучающей плоскости, так как, найдя при этом ϵ в двух взаимно перпендикулярных положениях ds_2 , по-

лучим, вместе с найденным для $\gamma=0$, три составляющие светового вектора. В этом случае (рис. 46)

$$\vartheta_1 = \arccos(\sin \vartheta_2 \cos \alpha).$$

Обозначим через x расстояние от плоскости s_1 до ds_2 , а через z — высоту ds_2 над ds_1 , измеренную по нормали к ds_2 : тогда

$$\frac{z}{x} = \zeta = \operatorname{ctg} \vartheta_2 \sec \alpha$$

и из (179)

$$f_2(\alpha, \vartheta_2) = \zeta f_1(\vartheta_1). \quad (180)$$

Это позволяет вести построение функции $f_2(\alpha, \vartheta_2)$ следующим путем. Задаемся значением этой функции $0 \leq f_2 \leq 1$ и, беря ряд значений ϑ_1 от 0 до 90° , вычисляем для них $f_1(\vartheta_1)$ по известной индикатрисе излучающей поверхности. После этого вычисляем ζ из уравнения (180). Таким образом получаем зависимость f_2 от ζ и ϑ_1 . Переходя к координатам α, ϑ_2 :

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 \vartheta_1 - \zeta^2}},$$

$$\cos \vartheta_2 = \zeta \cos \vartheta_1,$$

далее нетрудно построить эти линии в сетке, удобной для расчета потока от несимметричного источника (§ 22).

Возвратимся к произвольного вида поверхности s_1 и представим себе ряд поверхностей, подобных ей и подобно расположенных относительно некоторой точки P . На основании уравнения (179) можно утверждать, что коэффициент освещенности любой находящейся в P площади ds_2 от всех этих поверхностей будет одинаков. Коэффициент же связи точечного источника, помещенного в P , будет одинаков не только с подобными s_1 поверхностями, но и со всеми другими, занимающими тот же телесный угол. Однако поверхности, не подобные s_1 , дадут другого вида индикатрису $f_2(\alpha, \vartheta_2)$, вследствие чего коэффициент освещенности от них и будет другим.

Таким образом, имеет место закон подобия симметрично излучающих поверхностей: освещенность от всех подобных и подобно расположенных поверхностей одинакова в центре подобия.

Пусть поверхность s_1 произвольно-симметрично и равномерно излучающая, освещает поверхность s_2 . В разных точках последней индикатрисы $f_2(a, \vartheta_2)$, по (179), будут различны. Поэтому поверхность s_2 должна излучать с различными в разных точках несимметричными индикатрисами, чтобы между нею и s_1 был соблюден принцип обратимости. Если найти эти индикатрисы, то, по (178), можно вычислить коэффициенты освещенности ε_2 ряда точек поверхности s_2 . Тогда можно найти и коэффициент связи ψ_{12} по (67).

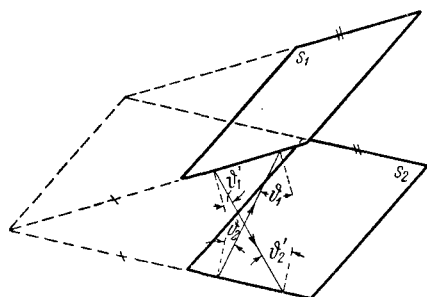


Рис. 47.

Расчет упрощается в некоторых случаях, когда принцип обратимости соблюдается и между одинаково и произвольно-симметрично излучающими поверхностями. Если каждой паре точек, принадлежащих: одна — поверхности s_1

(угол излучения ϑ_1'), другая — поверхности s_2 (угол падения ϑ_2'), соответствует другая пара точек с углами падения $\vartheta_1 = \vartheta_2'$ и излучения $\vartheta_2 = \vartheta_1'$, находящихся на том же расстоянии друг от друга, то $F_{12} = F_{21}$. Это будет, в частности, когда s_1 и s_2 — одинаковые прямоугольники, одинаково проектирующиеся друг на друга (рис. 47).

§ 25. Световое поле излучающей поверхности

Рассмотрим бесконечно протяженную плоскость 1 , излучающую равномерно и симметрично со светностью R , и параллельную ей площадку 2 (рис. 48). Коэффициент связи площадки с плоскостью

$$\varphi = 1,$$

так как она, если излучает, то только по одну сторону, в результате чего весь ее поток падает на плоскость 1 . Следовательно, коэффициент освещенности площадки

$$\varepsilon = 1$$

и освещенность ее

$$E = R \quad (181)$$

независимо от расстояния между плоскостью и площадкой. Это положение было известно сначала для излучения по закону Ламберта [Л. 85], но оно справедливо и в других случаях [Л. 221].

Выделим из той же излучающей плоскости сектор, показанный на рис. 48, с центральным углом α . Вершина O_1 этого угла лежит на нормали O_1O_2 к освещаемой площадке 2. Предположим, что излучает только выделенный сектор. Вследствие симметрии освещенность площадки 2 будет:

$$E_2 = \frac{\alpha}{2\pi} R, \quad (182)$$

причем она не зависит от расстояния O_1O_2 между плоскостями [Л. 165].

Симметрия требует также, чтобы световой вектор в точке O_2 лежал в плоскости, проходящей через биссектрису угла α и линию O_1O_2 . Следовательно, световой вектор можно найти по двум составляющим, одна из которых определяется освещенностью E_2 , а другая — освещенностью E_3 площадки 3, перпендикулярной плоскости вектора.

Освещенность E_3 определяет составляющую светового вектора, параллельную плоскости излучающего сектора. Величина светового вектора

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{E_2^2 + E_3^2}. \quad (183)$$

Разбивая излучающую поверхность на секторы, для которых $\Sigma\alpha = 2\pi$, убеждаемся, что сумма всех составляющих E_3 равна нулю, а составляющая E_2 имеет величину, равную R . Световой вектор в любой точке поля излучающей плоскости направлен по ее нормали и равен ее светности по величине. Световые линии в таком

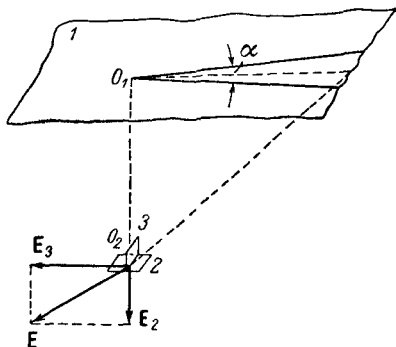


Рис. 48.

поле образуют, следовательно, пучок параллельных полупрямых. Семейство перпендикулярных этому пучку плоскостей, к которому относится и излучающая плоскость, будет семейством эквипотенциальных поверхностей: согласно уравнению (109) потенциал должен быть линейной функцией расстояния от излучающей плоскости, чтобы световой вектор был неизменным во всех точках поля.

Полагая, что на излучающей плоскости потенциал равен нулю, и совмещая с ней плоскость xoz , находим, что в точке поля (ξ, η, ζ) потенциал

$$V(\eta) = -R\eta. \quad (184)$$

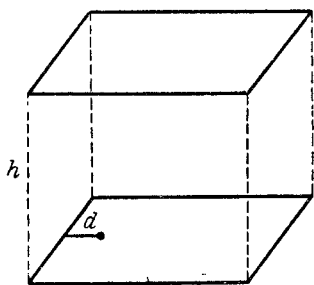


Рис. 49.

Таким образом, поле симметрично излучающей плоскости имеет потенциал, а световой вектор направлен по нормали к ней. Эти свойства излучающей плоскости были ранее установлены применительно к излучению по закону Ламберта [Л. 295].

Практически за излучающую плоскость (безграничную) можно принимать плоскую излучающую фигуру, расположенную на расстоянии, малом по сравнению с ее размерами, от параллельной ей освещаемой плоскости, в центральной части. Значения размеров излучающей плоской фигуры, которые этому удовлетворяют, зависят от индикатрисы. Если, например, $f(\vartheta) = 0$ при $\vartheta \geq \gamma$, то излучающая фигура может быть вполне точно заменена бесконечной плоскостью для всех точек ее ортогональной проекции, наименьшее расстояние которых от контура проекции $d \geq h \operatorname{tg} \gamma$, где h — расстояние между рассматриваемыми плоскостями (рис. 49). Вообще же плоскую фигуру можно принимать за бесконечную при тем меньших ее размерах, чем быстрее убывает $f(\vartheta)$ с увеличением ϑ .

В точках излучающих поверхностей ограниченного размера световой вектор может иметь, в зависимости от закона излучения, тангенциальную составляющую. При этом излучающая поверхность не будет ортогональной световым линиям, т. е. не может принадлежать семейству эквипотенциальных поверхностей или поверхностей уровня квазипотенциала.

Найдем световой вектор, создаваемый произвольного вида излучающей поверхностью s_1 , имеющей свет-

ность R , в точке, где находится освещаемый элемент ds_2 (см. рис. 6). Освещенность этого элемента

$$E = \epsilon R, \quad (185)$$

где ϵ — коэффициент освещенности, выражаемый формулой (64).

Введя вектор \mathbf{r} , равный по величине расстоянию r и направленный к ds_1 , имеем:

$$\cos \vartheta_2 = \mathbf{n}_2 \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Подставляя это выражение косинуса угла падения в (64), из (185) получим:

$$E = \frac{R}{\Omega} \mathbf{n}_2 \int_{s_1} f(\vartheta_1) \frac{\mathbf{r}}{r^3} ds_1.$$

Следовательно, искомый световой вектор

$$\mathbf{E} = \frac{R}{\Omega} \int_{s_1} f(\vartheta_1) \frac{\mathbf{r}}{r^3} ds_1, \quad (186)$$

где Ω и $f(\vartheta_1)$ — эквивалентный телесный угол и индикатриса излучающей поверхности.

Пусть x, y, z — координаты точки излучающей поверхности s , а ξ, η, ζ — координаты рассматриваемой точки поля; тогда

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} \quad (187)$$

и проекции светового вектора на координатные оси:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{R}{\Omega} \int_s f(\vartheta_1) \frac{\xi - x}{r^3} ds; \\ E_y &= \frac{R}{\Omega} \int_s f(\vartheta_1) \frac{\eta - y}{r^3} ds; \\ E_z &= \frac{R}{\Omega} \int_s f(\vartheta_1) \frac{\zeta - z}{r^3} ds. \end{aligned} \right\} \quad (188)$$

Сопоставляя уравнения (175) и (188), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \xi} &= -\frac{R}{\Omega} \mu \int_s \frac{\xi - x}{r^3} f(\vartheta_1) ds; \\ \frac{\partial W}{\partial \eta} &= -\frac{R}{\Omega} \mu \int_s \frac{\eta - y}{r^3} f(\vartheta_1) ds; \\ \frac{\partial W}{\partial \zeta} &= -\frac{R}{\Omega} \mu \int_s \frac{\zeta - z}{r^3} f(\vartheta_1) ds. \end{aligned} \right\} \quad (189)$$

Отсюда можно видеть, имеет ли световое поле потенциал или квазипотенциал, и найти вид этих функций, а также выбрать интегрирующий множитель μ .

Например, для плоского излучателя s с индикатрисой вида (147) имеем, располагая его в плоскости xoz :

$$f(\vartheta_1) = \frac{\eta^m}{r^m}; \quad (190)$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \xi} &= -\frac{R}{\Omega} \mu \iint_s \frac{(\xi - x) \eta^m dx dz}{[(\xi - x)^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{m+3}{2}}}; \\ \frac{\partial W}{\partial \eta} &= -\frac{R}{\Omega} \mu \iint_s \frac{\eta^{m+1} dx dz}{[(\xi - x)^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{m+3}{2}}}; \\ \frac{\partial W}{\partial \zeta} &= -\frac{R}{\Omega} \mu \iint_s \frac{(\zeta - z) \eta^m dx dz}{[(\xi - x)^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{m+3}{2}}}. \end{aligned}$$

Отсюда, полагая

$$\mu = \eta^{-m} \quad (191)$$

и принимая во внимание (149), находим:

$$W = \frac{R}{2\pi} \int_s \frac{ds}{r^{m+1}}. \quad (192)$$

При $m=1$ из выражений (191) и (192) следует результат А. А. Гершуна, полученный для случая излучения по закону Ламберта.

В случае плоской излучающей фигуры, ограниченной прямоугольным контуром, интегрирование здесь достаточно произвести для точки, лежащей на перпендикуляре к плоскости прямоугольника, восстановленном в одной из его вершин. Действительно, если нужно найти квазипотенциал, создаваемый прямоугольником $ABCD$ в точке, ортогональную проекцию которой на плоскость прямоугольника обозначим буквой G , то, построив показанные на рис. 38 вспомогательные прямоугольники $ADEF$, $AFGH$ и $AHIB$, найдем, что искомый квазипотенциал

$$W_{ABCD} = W_{CEGI} - W_{DEGH} - W_{BFGI} + W_{AFGH}. \quad (193)$$

Подобным же образом легко найти проекции светового вектора E_x, E_y, E_z в любой точке толя, вычислив их для указанного расположения по формулам (175). Освещенности E_x, E_y, E_z в точке G (рис. 38) вычисляются тогда по формуле, аналогичной (193):

$$E_{ABCD} = E_{CEGI} - E_{DEGH} - E_{BFGI} + E_{AFGH}. \quad (194)$$

Рассмотрим теперь плоскость, излучающую по закону (147). В этом случае, согласно (175), (181), (191), квазипотенциал определяется уравнением

$$- \gamma_i^m \frac{dW}{d\gamma_i} = R. \quad (195)$$

Отсюда получаем: при $m=0$ (закон Эйлера) — потенциал (184); при $m=1$ (закон Ламберта) — квазипотенциал

$$W(\gamma_i) = R \ln \frac{1}{\gamma_i}; \quad (196)$$

при других $m > 0$ — квазипотенциал

$$W(\gamma_i) = \frac{R}{(m-1)\gamma_i^{m-1}}. \quad (197)$$

Легко видеть, вместе с тем, что световой вектор поля бесконечной излучающей плоскости во всех трех случаях является градиентом потенциала (184), но может быть вычислен и через градиент квазипотенциалов (196)

и (197) и интегрирующий множитель (191). В качестве интегрирующего множителя можно принять в этом случае и любую другую интегрируемую функцию $\mu(\eta)$ координаты η , чему будет соответствовать квазипотенциал [Л. 391]

$$W(\eta) = -R \int_0^{\eta} \mu(\tau) d\tau. \quad (198)$$

Иначе говоря, световое поле плоскости, излучающей по любому симметричному закону, имеет потенциал (184) и бесчисленное множество квазипотенциалов (198), в частности вида (196) и (197), получаемых при всевозможных интегрирующих множителях $\mu(\eta)$.

При $m \rightarrow \infty$ рассматриваемый плоский излучатель дает в пределе параллельный пучок лучей. Как поле излучающей плоскости, так и поле любой плоской излучающей фигуры имеют в этом случае тот же потенциал и те же квазипотенциалы, но лишь в области, занимаемой параллельным пучком [Л. 391].

Получив эквипотенциальные поверхности или поверхности уровня квазипотенциала, можно найти семейство их ортогональных траекторий, т. е. построить световые линии. Если светность одинакова по всей излучающей поверхности, то из световых линий легко составить трубки, содержащие одинаковые световые потоки: такие трубки должны иметь началом одинаковые по площади участки излучающей поверхности.

На расстояниях, по сравнению с которыми размерами излучающей поверхности можно пренебречь, ее можно принимать за точечный источник (§ 1). Это означает, что на таких расстояниях световые линии поля излучающей поверхности приближаются к пучку полупрямых, в вершине которого как бы находится заменяющий ее точечный источник. В этой области поля сила света такого точечного источника, который может быть несимметричным,

$$I = |E| r^2,$$

где r — расстояние от вершины пучка спрямляющихся световых линий, E — световой вектор, существующий на этом расстоянии в рассматриваемом направлении, как показано на рис. 50, где в искаженном масштабе представлено одно из сечений поля излучающей поверхности s .

Отсюда следует, что в области спрямляющихся световых линий поле всякой излучающей поверхности имеет квазипотенциал или потенциал. В области же, ближайшей к излучающей поверхности, ни квазипотенциала, ни потенциала может не быть, и световые линии там могут быть построены лишь вычислением составляющих светового вектора.

На рис. 51 показана световая трубка, идущая с участка s_0 излучающей поверхности s_1 . Эта трубка содержит световой поток Rs_0 , если R — светность поверхности s_1 , одинаковая во всех ее точках, так что полный поток излучающей поверхности равен Rs_1 . На любую поверхность s_2 , охватывае-

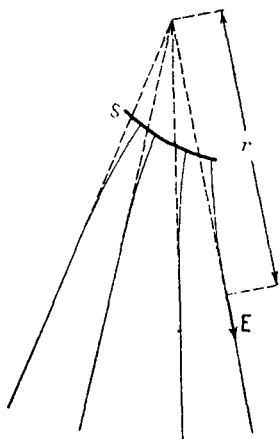


Рис. 50.

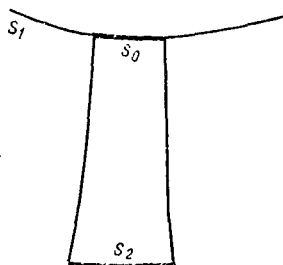


Рис. 51.

мую рассматриваемой трубкой, будет падать поток Rs_0 . Поэтому коэффициент связи поверхностей s_1 и s_2

$$\psi_{12} = \frac{s_0}{s_1}. \quad (199)$$

Таким образом, коэффициент связи излучающей поверхности с освещаемой легко найти, построив световую трубку; сечением которой является освещаемая поверхность. В действительности на s_2 попадает не весь поток, идущий с s_0 , а некоторая часть его, с которой складывается поток, посылаемый на s_2 остальной частью

$$s_3 = s_1 - s_0$$

излучающей поверхности.

Вводя коэффициенты связи ψ_{02} и ψ_{32} участков s_0 и s_3 с поверхностью s_2 , имеем:

$$(1 - \psi_{02}) s_0 = \psi_{32} s_3. \quad (200)$$

Рассмотрим еще пространственную освещенность в поле излучающей поверхности. По формуле (48) нетрудно получить, обращаясь к рис. 6, что пространственная освещенность от излучающей поверхности s_1

$$E_{\circ} = \frac{R}{\Omega} \int_{s_1} \frac{f(\theta_1)}{r^2} ds_1. \quad (201)$$

Если плоская фигура s излучает по закону (147), то, принимая во внимание (149) и (190), имеем:

$$E_{\circ} = \frac{m-1}{2\pi} R \tau_i^m \int_s \frac{ds}{r^{m+2}}. \quad (202)$$

Сопоставляя это с (192) и обозначая через W_m квазипотенциал рассматриваемой точки поля плоской излучающей фигуры, находим:

$$E_{\circ} = (m+1) \tau_i^m W_{m+1}. \quad (203)$$

Таким образом, пространственная освещенность от плоской фигуры, излучающей по закону (147), выражается через квазипотенциал такой же геометрической фигуры, в законе излучения которой m на единицу больше. Например, пространственная освещенность от фигуры, излучающей по закону Эйлера, выражается через квазипотенциал такой же фигуры, излучающей по закону Ламберта. Заметим, что квазипотенциал в соотношении (203) соответствует интегрирующему множителю (191).

§ 26. Коэффициенты связи в призмах и цилиндрах

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед единичной высоты, основание которого имеет стороны x и y (рис. 52). Вычисление коэффициентов связи его граней удобно вести в прямоугольных координатах x , y , оси которых совпадают со сторонами основания. Тогда в (67) и (69) необходимо ввести множитель k , равный числу равновеликих частей, на которые две рассматриваемые

грани могут быть рассечены плоскостями, перпендикулярными обеим; $k = 4$ для коэффициента связи оснований, а для коэффициента связи основания с боковой гранью $k = 2$ [коэффициент k входит в (68), если вычисление вести в тех же координатах].

Представим теперь, что основание параллелепипеда излучает, и вычислим коэффициент связи его с боковой гранью, имеющей ширину y . По (69), считая основание за s_1 , а боковую грань за s_2 , полагая

$$ds_1 = d\xi d\eta$$

и вводя $k = 2$, имеем:

$$\psi_{12} = \frac{2}{xy} \int_{\xi=0}^x \int_{\eta=0}^y \varphi_{\eta_1} d\xi d\eta, \quad (204)$$

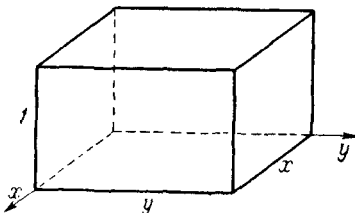


Рис. 52.

где φ_{η_1} определяется по (172). Сюда будет входить интеграл ($\varphi_{\ominus} = 1$).

$$\begin{aligned} & \int_{\xi=0}^x \int_{\eta=0}^y \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} d\xi d\eta = \\ & = xy \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{y^2 - x^2}{4} \ln(x^2 + y^2) + \frac{1}{2} (x^2 \ln x - y^2 \ln y); \end{aligned}$$

если, поменяв в нем местами x и y , умножить сумму результатов на $1/\pi xy$ — множитель из (204), то получим $1/2$, т. е. половину потока излучающего прямоугольника. Вторым интегралом, входящим в (204), получим с помощью (171):

$$\frac{2}{xy} \int_{\xi=0}^x \int_{\eta=0}^y \varphi_1 d\xi d\eta.$$

Когда излучающая и освещаемая грани меняются ролями, для вычисления коэффициента связи по (204) следует поставить $1/x$ на место x и y/x на место y . Меняя местами x и y в формуле (204), получаем коэффициент связи основания с другой боковой гранью. Складывая этот результат со значением ψ_{12} , определяемым по формуле (204), и вычитая удвоенную сумму из единицы, находим коэффициент связи оснований параллелепипеда.

Рассмотрим теперь два одинаковых плоских контура, являющихся ортогональными проекциями один другого, и представим проходящую через них цилиндрическую поверхность (рис. 53). Обозначим последнюю через s_2 , а площадь, ограниченную контуром, — s_1 . Пусть площадь одного из контуров и цилиндр симметрично излучают с одинаковой светностью. Тогда отношение потоков, падающих из контура на цилиндр и обратно,

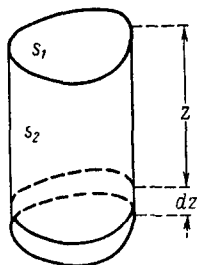


Рис. 53.

$$\frac{F_{12}}{F_{21}} = \frac{\psi_{12}s_1}{\psi_{21}s_2},$$

где ψ_{12} и ψ_{21} — соответственные коэффициенты связи. Отсюда отношение прямого и обратного коэффициентов связи боковой поверхности и основания цилиндра

$$\frac{\psi_{21}}{\psi_{12}} = \frac{F_{21}s_1}{F_{12}s_2}. \quad (205)$$

Коэффициент связи между основаниями цилиндра, согласно (71),

$$\psi = 1 - \psi_{12}. \quad (206)$$

Обозначим через z высоту рассматриваемого цилиндра. Когда z получает приращение dz , коэффициент ψ уменьшается на $\psi'dz$, а ψ_{12} увеличивается на $-\psi'dz$, где

$$\psi' = \frac{d\psi}{dz}.$$

Следовательно [Л. 180], коэффициент связи основания цилиндра с находящейся на расстоянии z цилиндрической полосой высоты dz (рис. 53)

$$d\psi_{12} = -\psi'dz. \quad (207)$$

Вследствие закона подобия излучающих поверхностей (§ 24) все коэффициенты связи будут постоянны при пропорциональном изменении размеров цилиндра. Действительно, этот закон может быть применен к каждой точке внутренних поверхностей цилиндра, как к центру подобия. Поэтому коэффициенты освещенности в соответственных точках подобных цилиндров будут одинаковы. Поток, падающий на освещенную поверх-

ность, будет изменяться ей пропорционально, а следовательно, и пропорционально потоку излучающей поверхности.

Выясним, при каких условиях можно считать одинаковыми коэффициенты связи в цилиндрах, не являющихся геометрически подобными. Будем рассматривать ряд цилиндров одинаковой высоты, но с различными по размерам и форме основаниями. С увеличением площади основания коэффициент ψ_{21} стремится к $1/2$, поэтому в пределе поток F_{21} становится пропорциональным $s_2/2$, а поток F_{12} — приблизительно пропорциональным s_2 , так как влияние отдаленных излучающих элементов слабо для реальных индикатрис. Поэтому при больших значениях s_1/s_2 из (205) следует, что коэффициент ψ_{12} пропорционален отношению s_2/s_1 и коэффициент связи $\psi = \text{const}$ при

$$\frac{s_1}{s_2} = \text{const}. \quad (208)$$

В случаях соблюдения принципа обратимости это более точно, так как $F_{12} = F_{21}$.

Применим эти соображения к двум поверхностям, первая из которых — основание уже рассмотренного параллелепипеда, вторая — совокупность его четырех боковых граней (рис. 52); тогда

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{xy}{2(x+y)},$$

и условие (208) приводится к условию постоянства величины

$$q = \frac{xy}{x+y}, \quad (209)$$

представляющей половину среднего гармонического между x и y , которую назовем индексом формы.

Таким образом, коэффициент связи ψ между основаниями параллелепипеда будет постоянен при $q = \text{const}$, если q достаточно велико. Отсюда получается следующий приближенный способ определения этого коэффициента связи. Можно, очевидно, ограничиться вычислением индекса q в одном из простейших случаев: при $x = y$ или при $y \rightarrow \infty$, приводя всякий другой параллелепипед к простейшему через индекс формы. Иными

словами, коэффициент связи между всякими параллельными прямоугольниками может быть найден как коэффициент связи эквивалентных квадратов или бесконечных полос.

Положим, что x — большая сторона основания параллелепипеда, и напишем формулу (209) в виде:

$$q = \frac{y}{1 + \frac{y}{x}}.$$

Обозначим сторону эквивалентного квадрата через u ; тогда

$$q = \frac{u}{2};$$

$$u = \frac{2y}{1 - \frac{y}{x}}.$$

Так как y/x может изменяться от 0 до 1, то отсюда следует, что индекс формы слабо зависит от отношения сторон прямоугольника [Л. 173]. Далее, из последней формулы заключаем, что сторона квадрата составляет от двух до одной меньшей стороны прямоугольника. Следовательно, при выборе эквивалентного квадрата по (209) коэффициент связи будет зависеть главным образом от отношения меньшей стороны прямоугольника к расстоянию между излучающей и освещаемой плоскостями, как и показывают опытные данные.

Чтобы выяснить наименьшее значение q , при котором возможна замена прямоугольника квадратом по (209), рассмотрим такую замену в случае вычисления коэффициента связи между основаниями параллелепипеда, у которого одна сторона основания бесконечно большая, а другая равна x . Для такого параллелепипеда $q = x$, и при вычислении коэффициента связи в случае излучения по закону Эйлера получается [Л. 152, 224] практически идеальное совпадение с значением ψ при $x=y$ и одинаковом q , если $q \geq 1$.

Рассматривая уравнение Болдырева (148), заметим что замена излучающего прямоугольника квадратом по (209), таким образом, проверена для первого из членов этого уравнения, пропорционального $\cos \vartheta$ в нулевой степени. Следующие члены, содержащие высшие степени

$\cos \theta$, должны давать еще лучшие результаты, так как коэффициенты связи будут все менее зависеть от формы прямоугольника с увеличением показателя степени. Так, в случае излучения по закону Ламберта этот способ вычисления коэффициента связи дает вполне удовлетворительные результаты уже при $q \gg 2/3$ [Л. 395]. Следовательно, формула (209) применима для всевозможных реальных индикатрис; она может быть, очевидно, обобщена к условию (208) в виде:

$$q = \frac{2s}{ph}, \quad (210)$$

где s — площадь, а p — периметр основания цилиндра или призмы, коэффициент связи оснований которых постоянен при $q = \text{const}$. Это положение справедливо во всех случаях симметричного излучения, характеризуемого обычного вида убывающими кривыми относительной освещенности, при

$$q \geq 1 \quad (211)$$

и при условии, что связываемые контуры выпуклые.

При соблюдении перечисленных условий систему из двух параллельных плоских фигур можно считать эквивалентной системе из двух бесконечных параллельных полос в том смысле, что коэффициенты связи в обеих системах одинаковы. Следовательно, определение коэффициента связи таких фигур сводится к более простой задаче, решаемой путем вычисления коэффициента связи бесконечных плоскопараллельных полос одинаковой ширины, расположенных одна под другой. Простейший способ решения этой задачи дает применение способа Руссо.

Пусть ширина полос и расстояние между ними попрежнему x и l . Возьмем элемент ds излучающей полосы, расположенный у ее края (рис. 54), и вычислим для него коэффициент связи $\varphi(x)$ по (166), равный коэффициенту освещенности ε этого элемента от полосы. Найдя ε для ряда значений x , построим зависимость $\varepsilon(x)$. Искомый коэффициент связи между полосами ширины x , по (67) при $k = 2$,

$$\psi(x) = \frac{2}{x} \int_0^x \varepsilon(\xi) d\xi. \quad (212)$$

Как было выяснено выше, в этом случае $x = q$. Поэтому, определив ψ для ряда значений x , получим

зависимость $\psi(q)$, которая с помощью формулы (210) даст возможность определять коэффициенты связи и потоки во многих других задачах. Рассмотрим, например, прямоугольники 1, 2, 3 и 4 (рис. 55). Зависимость $\psi(q)$ непосредственно позволяет вычислить потоки F_{13} , F_{24} и $F_{(1+2)(3+4)}$. Но поток.

$$F_{(1+2)(3+4)} = F_{13} + F_{14} + F_{23} + F_{24}.$$

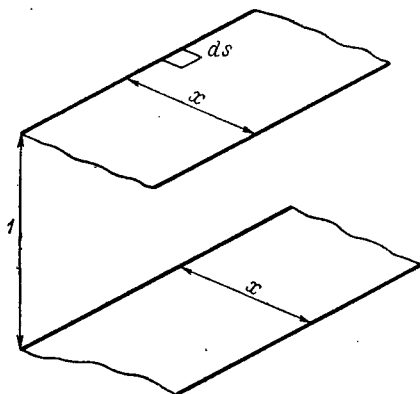


Рис. 54.

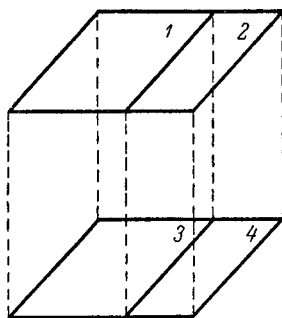


Рис. 55.

По принципу обратимости $F'_{14} = F_{41}$, а по геометрическим причинам $F_{23} = F_{41}$; следовательно,

$$F_{14} = F_{23} = \frac{1}{2} [F_{(1+2)(3+4)} - F_{13} - F_{24}]; \quad (213)$$

$$\psi_{14} = \frac{1}{2s_1} [\psi_{(1+2)(3+4)}(s_1 + s_2) - \psi_{13}s_1 - \psi_{24}s_2].$$

Таким же способом легко составить аналогичные выражения для других расположений параллельных прямоугольников, ранее полученные для частного случая излучения по закону Ламберта [Л. 212].

Рассмотрим еще вычисление коэффициента связи двух дисков, являющихся основаниями прямого кругового цилиндра радиуса x и единичной высоты. Формула (164) выражает в этом случае коэффициент связи элемента излучающего основания, находящегося на рас-

стоянии ξ от центра, с другим основанием. В полярных координатах ξ, β (рис. 36) площадь излучающего элемента равна $\xi d\xi d\beta$, а поток, падающий от него на противоположное основание, равен $R\xi \varphi(x, \xi) d\xi d\beta$, если R — его светность. Тогда искомый коэффициент связи найдем, интегрируя последнее выражение по β от 0 до 2π , а по ξ от 0 до x , и деля результат на поток $\pi x^2 R$ излучающего основания:

$$\psi(x) = 2x^2 \int_0^x \xi \varphi(x, \xi) d\xi. \quad (214)$$

По формуле (210) для кругового цилиндра, как и для параллелепипеда с основанием в виде бесконечной полосы,

$$q = x. \quad (215)$$

§ 27. Излучающие линии

Если один из размеров излучающей поверхности настолько мал, что им можно пренебречь в сравнении с другими и с расстоянием, на которое она действует, то излучающая поверхность может быть принята за линию.

Излучающие линии удобно характеризовать значением светового потока, даваемого линией с единицы ее длины.¹ Эту величину, измеряемую в единицах потока на единицу длины [Л. 310], можно назвать погонной плотностью светового потока; обозначим ее через L . Отрезок dl излучающей линии будет давать световой поток

$$dF = L dl.$$

Рассматривая такой отрезок как точечный источник с индикатрисой $f(\theta)$, найдем, что сила света его в направлении, составляющем угол θ с фотометрической осью,

$$dI = \frac{L}{\Omega} f(\theta) dl.$$

¹ Это позволяет более наглядно представить свойства линии в общих соотношениях, чем часто применяемая характеристика в виде силы света по нормали к линии, приходящейся на единицу длины.

Обратимся к рис. 56 и рассчитаем освещенность от элемента dl излучающей прямой, получаемую в точке O на одной из трех взаимно перпендикулярных площадок I , II и III ; эта освещенность

$$dE = \frac{dl}{r^2} \cos \beta, \quad (216)$$

где r — расстояние от dl до O ;
 β — угол падения.

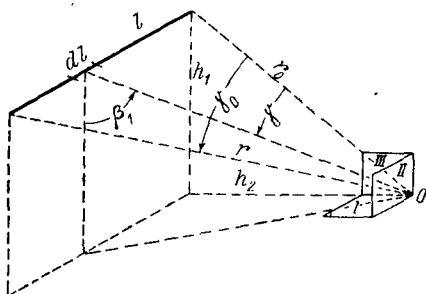


Рис. 56.

Обозначим через r_0 расстояние (кратчайшее) от линии до точки O и введем угол γ :

$$\cos \gamma = \frac{r_0}{r}, \quad (217)$$

$$l = r_0 \operatorname{tg} \gamma,$$

$$dl = \frac{r_0}{\cos^2 \gamma} d\gamma.$$

Обозначим далее через h_1 длину перпендикуляра, опущенного из какой-либо точки излучающей линии на параллельную ей плоскость площадки I ; тогда

$$\cos \beta_1 = \frac{h_1}{r}, \quad (218)$$

где β_1 — угол падения на площадку I . Освещенность этой площадки от элемента dl получим, подставляя в (216) предыдущие выражения:

$$dE_1 = \frac{Lh_1}{\Omega r_0^2} f(\vartheta) \cos \gamma d\gamma. \quad (219)$$

Пользуясь правилом перпендикуляров (§ 15), находим, что освещенность площадки *II*

$$dF_2 = \frac{h_2}{h_1} dE_1, \quad (220)$$

где h_2 — длина перпендикуляра, опущенного из какой-либо точки линии на параллельную ей плоскость площадки *II*.

Так же рассуждая, найдем освещенность площадки *III*:

$$dE_3 = \frac{L}{\Omega r_0} f(\vartheta) \sin \gamma d\gamma. \quad (221)$$

Освещенность от всей линии получим интегрированием этих выражений от 0 до γ_0 . Освещенность от полубесконечной линии получится при $\gamma_0 = \pi/2$; от бесконечной линии она вдвое больше.

Способ интегрирования зависит от вида индикатрисы и связи углов ϑ и γ .

Для трубки, т. е. линии, заменяющей круговой цилиндр малого диаметра,

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \gamma. \quad (222)$$

Для линии, заменяющей узкую ленту или полосу, параллельную, например, плоскости *I*,

$$\vartheta = \beta_1. \quad (223)$$

По найденным значениям трех освещенностей легко вычислить световой вектор и освещенность всякой плоскости, не пересекающей излучающей линии. Полученные выражения освещенности могут быть применены и в тех случаях, когда освещаемая точка лежит не против конца линии, а против средней части или в стороне. В первом случае освещенность будет равна сумме ее значений, вычисленных от частей линии, находящихся по одну и другую сторону точки *O*; во втором — разности значений, соответствующих длине линии, увеличенной на расстояние от ее ближайшего конца до той же точки, и вводимому таким образом дополнению линии.

Освещение от излучающей трубки исследовано при индикатрисах вида (147) и $m=1$ -8 [Л. 388], а также при индикатрисах, встречающихся при применении люминесцентных ламп [Л. 336] и в более общих случаях [Л. 285, 291, 393].

Рассмотрим освещенность dE_3 при $h_2 = 0$ в случае излучающей ленты, параллельной плоскости I (рис. 56). При этом $\gamma = \vartheta$, $r_0 = h_1$ и

$$dE_3 = \frac{L}{\omega h_1} f(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Положим, что индикатриса имеет вид (147); тогда при длине ленты

$$l = h_1 \operatorname{tg} \theta,$$

освещенность

$$E_3 = \frac{L}{\omega_m h_1} \int_0^\theta \cos^m \vartheta \sin \vartheta d\vartheta.$$

Принимая во внимание (149), получаем:

$$E_3 = \frac{L}{2\pi h_1} \left[1 - \frac{h_1^{m+1}}{(h_1^2 + l^2)^{\frac{m+1}{2}}} \right]. \quad (224)$$

Если лента расположена по обе стороны площадки III и имеет с одной стороны длину l_1 , а с другой l_2 (рис. 57), параллельная полосе составляющая E_t светового вектора равна разности значений E_3 , вычисленных по l_1 и по l_2 .

При $l_1 < l_2$

$$|E_t| = \frac{L}{2\pi} h_1^m \left[\frac{1}{(h_1^2 + l_1^2)^{\frac{m+1}{2}}} - \frac{1}{(h_1^2 + l_2^2)^{\frac{m+1}{2}}} \right]. \quad (225)$$

Из последнего выражения найдем тангенциальную составляющую светового вектора, полагая $h_1 = 0$. Она равна нулю в середине ленты ($l_1 = l_2$), а в остальных точках ленты отличается от нуля лишь при $m = 0$, т. е. в случаях излучения по закону Эйлера или с индикатрисой вида (148) при $a_0 \neq 0$.

Таким образом, в точках плоского излучателя, не лежащих на его краях, тангенциальная составляющая светового вектора отсутствует при всех как целых, так и

дробных значениях m , больших нуля. Она отсутствует, следовательно, и в случае индикатрисы вида (148), если $\alpha_0 = 0$. Но тангенциальная составляющая существует при всех рассматриваемых значениях m на краях плоского излучателя. Для ленты это следует из (224). Вводя ширину ленты Δ , имеем:

$$\frac{L}{h_1} = R \frac{\Delta}{h_1} = R\delta,$$

где R — светность, а δ — угол, стремящийся к π при $h_1 \rightarrow 0$. Поэтому из (224) находим, что тангенциальная составляющая светового вектора на краю ленты

$$|E_t| = \frac{R}{2}.$$

Применяя линейные источники, можно определять также их невыгоднейшее расположение [Л. 283, 381]. Для упрощения расчета применяется построение изолук: точечных, когда линия заменяется точечным источником, и предложенных Г. М. Кноррингом линейных — от отрезка линии, определяемого отношением l/h_1 . При данных значениях отношений l/h_1 и h_2/h_1 (рис. 56) освещенность E_1 , как следует из (219), обратно пропорциональна первой степени высоты h_1 .

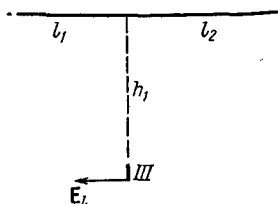


Рис. 57.

Расчет светового потока от излучающей линии [Л. 399] в принципе может быть выполнен интегрированием по ее длине светового потока от ее элемента, находимого как поток от точечного источника. Поток от прямой линии на параллельные ей бесконечные полосы удобно вычислять, построив характеристику линии, представляющую зависимость светового потока с единицы ее длины, приходящегося на единицу элементарного двугранного угла, образуемого двумя плоскостями, проходящими через линию, от угла θ , измеряемого в плоскости, перпендикулярной линии, и характеризующего положение элементарного двугранника. Эту характеристику можно назвать двугранно-угловой плотностью потока.

На рис. 58 показана часть сферы единичного радиуса, совмещенной диаметром с излучающей линией, и три меридиональные плоскости: начальная, совмещенная

с плоскостью чертежа, составляющая с ней угол θ и образуемая приращением последнего $d\theta$. Пусть излучающая линия — лента, перпендикулярная плоскости чертежа. Рассмотрим ее элемент dl , находящийся в центре сферы, нормаль \mathbf{n} к которому лежит в плоскости начального меридиана. Элемент излучает симметрично относительно направления \mathbf{n} , имея индикатрису $f(\vartheta)$.

В направлении, характеризуемом углом θ и углом γ , отсчитываемым от экваториальной плоскости, в которой измеряется θ , угол ϑ определяется как гипотенуза прямоугольного сферического треугольника с катетами γ и θ :

$$\cos \vartheta = \cos \gamma \cos \theta. \quad (226)$$

Приращения углов γ и θ образуют телесный угол

$$d\omega = \cos \gamma d\gamma d\theta,$$

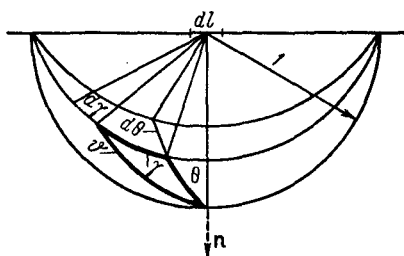


Рис. 58.

в котором от dl распространяется световой поток

$$\frac{L dl}{\Omega} f(\vartheta) d\omega,$$

где Ω определяется по (53).

Доля потока рассматриваемого элемента внутри двугранного угла, образованного приращением $d\theta$, приходящаяся на единицу угла θ ,

$$F(\theta) = \frac{2}{\Omega} \int_0^{\pi/2} f(\vartheta) \cos \gamma d\gamma. \quad (227)$$

Входящий сюда интеграл можно вычислить по способу Руссо, если для каждого значения γ найти $f(\vartheta)$ с помощью (226). Функция $F(\theta)$ определяет и долю потока любой части линии в том же двуграннике, приходящуюся на единицу угла θ . Поэтому поток от линии длиной l , падающий на бесконечную полосу, границы которой определяют углы θ_1 и θ_2 (рис. 59),

$$F = Ll \int_{\theta_1}^{\theta_2} F(\theta) d\theta. \quad (228)$$

Интегрирование легко выполнить по графику $F(\theta)$. Практически этот способ вычисления потока можно применять и для полос конечной длины, например l , причем неточность за счет краевого эффекта обычно невелика, если длина излучающей линии в несколько раз больше расстояния до освещаемой полосы.

Для излучающей трубки, вследствие симметрии, $F(\theta)$ определяется простейшим образом [Л. 318]:

$$F(\theta) = \frac{1}{2\pi}, \quad (229)$$

т. е. не зависит ни от угла θ , ни от индикатрисы.

Из (228) легко получаем коэффициент связи рассматриваемой излучающей линии с бесконечной полосой:

$$\psi = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F(\theta) d\theta. \quad (230)$$

Для излучающей трубки, согласно (229),

$$\psi = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi}. \quad (231)$$

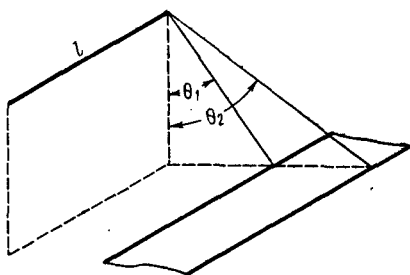


Рис. 59.

Этот коэффициент связи не зависит от длины линии, а в случае излучающей трубки — и от индикатрисы.

Рассмотрим излучающую линию, освещающую элемент коаксиального кругового цилиндра радиуса r , ограниченный углами θ и $\theta + d\theta$ при $l \rightarrow \infty$. Освещенность этого элемента, одинаковая по всей его длине,

$$E = \frac{LlF(\theta)d\theta}{lr d\theta} = \frac{L}{r} F(\theta).$$

Отсюда следует известное положение: освещенность от бесконечной линии обратно пропорциональна первой степени расстояния.

С укорочением линии или с увеличением расстояния до нее, зависимость создаваемой ею освещенности от расстояния постепенно приближается к закону квадратов. Поэтому, при достаточно малом отношении длины

линии к расстоянию, излучающую линию можно заменить точечным источником, помещенным в середине ее длины. Допуская погрешность в 5%, это можно делать, когда длина линии не превышает половины ее высоты над освещаемой плоскостью [Л. 283].

Мы рассматривали здесь излучающие прямые. Можно так же исследовать другие излучающие линии, в частности окружность [Л. 294, 347].

§ 28. Двухмерные поля

Двухмерное поле определим в каждой его точке составляющими E_x и E_y светового вектора по осям прямоугольной системы координат xOy . Знание величин этих составляющих E_x и E_y в функции координат ξ, η позволяет построить на плоскости xOy световые линии, дифференциальное уравнение которых

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{E_y}{E_x}. \quad (232)$$

Двухмерные поля всегда имеют квазипотенциал или потенциал (§ 14). Когда эти функции могут быть найдены без построения световых линий, составляющие светового вектора определяются формулами (175). Если известно, что световые линии ортогональны излучающей поверхности, то световой вектор удобно находить, рассматривая три семейства взаимно ортогональных поверхностей, одно из которых представляет поверхности уровня квазипотенциала или эквипотенциальные, включая и излучающую поверхность. Поверхности каждого семейства следует рассматривать как поверхности постоянного значения одной из координат координатной системы, в которой ведется исследование поля [Л. 295]. Метод, предложенный Муном и Спенсер [Л. 295, 296], состоит в выборе криволинейных координат применительно к виду излучающей поверхности, составлении уравнения Лапласа в этих координатах, его решении, содержащем две постоянные, и определении этих постоянных, а также интегрирующего множителя μ из условий, что на излучающей поверхности квазипотенциал $W=0$, а величина светового вектора, в точках излучаю-

щей поверхности равная ее светности, стремится к нулю в бесконечном отдалении.

Условием ортогональности световых линий к излучающей поверхности является отсутствие тангенциальной составляющей светового вектора (§ 25). При излучении по любому закону, но симметричном относительно нормали, это обеспечивается геометрической симметрией: сечения излучающей поверхности плоскостями, проходящими через нормаль, симметричны относительно нормали. Такой симметрией обладают излучающая плоскость, рассмотренная в § 25, шар и круговой цилиндр бесконечной высоты.

Рассмотрим излучающую поверхность шара радиуса r_0 , имеющую светность R . Световое поле такой поверхности симметрично относительно любой прямой, проходящей через центр шара, а следовательно, световые линии образуют пучок полупрямых с вершиной в центре шара. Световое поле имеет такой же вид, как у точечного источника, помещенного в центре шара: сферическая поверхность, излучающая по любому закону, может быть заменена точечным источником, помещенным в ее центре. Ламберт показал это для шара, излучающего по его закону [Л. 12]. Вследствие симметрии такой источник должен действовать одинаково по всем направлениям, т. е. должен быть равномерным. Поэтому световое поле шара имеет потенциал (117) и множество квазипотенциалов (116). Входящую в эти выражения силу света I легко найти, для световой поток шара, равный $4\pi r_0^2 R$, на 4π .

Следует заметить, что освещение от заменяющего шар точечного источника будет таким же, как от шара, лишь на поверхностях, освещаемых всей шаровой поверхностью. Поэтому, в частности, излучающий шар не имеет равномерноосвещенных поверхностей с образующими в виде лемнискат, как равномерный точечный источник (§ 19).

Подобным же образом легко выяснить свойства поля кругового цилиндра бесконечной длины, симметрично излучающего по любому закону, светность R которого одинакова по всей его поверхности. Вследствие симметрии, световое поле в этом случае плоское. Световой вектор лежит в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, и направлен по его радиусу. Величина светового вектора

на расстоянии r от оси равна освещенности коаксиальной поверхности кругового цилиндра радиуса r :

$$E = R \frac{r_0 r}{r^2}, \quad (233)$$

где r_0 — радиус излучающего цилиндра.

Следовательно, цилиндрические поверхности, ортогональные линиям светового вектора, являются поверхностями постоянного значения его величины, т. е. эквипотенциальными. Световое поле бесконечного кругового цилиндра имеет потенциал не только в известном случае излучения по закону Ламберта [Л. 295], но и во всех других случаях симметричного излучения с равномерной светностью. Поэтому, в частности, поле линии газосветных ламп на расстояниях, малых по сравнению с ее длиной, имеет потенциал во всех областях спектра, а не только в области слабого поглощения собственной радиации, где можно принимать, что такая лампа излучает по закону Эйлера.

Формула (233) показывает также, что освещенность от рассматриваемого цилиндра обратно пропорциональна расстоянию до его оси.

Преобразуем выражение (233), введя погонную плотность потока, т. е. световой поток цилиндрической излучающей поверхности единичной высоты:

$$L = 2\pi r_0 R; \quad (234)$$

тогда

$$E = \frac{Lr}{2\pi r^2}. \quad (235)$$

Это выражение светового вектора не зависит от радиуса цилиндра. Оно справедливо и при $r_0 \rightarrow 0$, когда цилиндр превращается в излучающую прямую в виде бесконечно тонкой трубки. Световое поле кругового цилиндра бесконечной высоты совпадает с полем такой линии, совмещенной с осью цилиндра, подобно тому как поле шара совпадает с полем равномерного точечного источника, расположенного в центре шара. При этом, вследствие симметрии, линия излучает одинаково во всех проходящих через нее плоскостях. Ее поле имеет квазипотенциалы, поверхности уровня которых — коаксиальные цилиндры, совмещенные осью с излучающей линией.

Таким образом, световое поле кругового цилиндра бесконечной высоты имеет квазипотенциалы, зависящие, как и соответственные интегрирующие множители, только от расстояния r . Поэтому уравнение (109) здесь получим, учитывая (235), в виде:

$$-\frac{1}{\mu(r)} \cdot \frac{dW}{dr} = \frac{L}{2\pi r};$$

отсюда квазипотенциал, определяемый с точностью до постоянной,

$$W = -\frac{L}{2\pi} \int \frac{\mu(r)}{r} dr. \quad (236)$$

Функция $\mu(r)$ может быть выбрана произвольно. При $\mu=1$ квазипотенциал превращается в потенциал

$$V = -\frac{L}{2\pi} \ln r. \quad (237)$$

Световое поле всякого кругового цилиндра, светность которого одинакова по всей его поверхности, симметрично относительно его оси. Для цилиндра бесконечной высоты мы получили бы те же результаты, что и выше, исследуя его поле в любой плоскости, проходящей через его ось, в которой оно полностью определяется, так же как и в плоскости, перпендикулярной оси. Поле цилиндра конечной высоты может быть полностью описано лишь в плоскости, проходящей через его ось.

Нетрудно построить поверхности, равноосвещенные излучающей линией — трубкой бесконечной длины. Это — семейства цилиндров, с направляющими в виде лемнискат, узловая точка которых является точкой пересечения с осью цилиндра, и огибающая это семейство поверхность кругового цилиндра [Л. 216]. Излучающий круговой цилиндр бесконечной высоты, но конечного радиуса, равноосвещенных поверхностей, профилируемых лемнискатами, не имеет по той же причине, которая выяснена выше для шара.

Излучающий цилиндр бесконечной высоты, направляющей которого служит не окружность, а какая-либо другая кривая, действует как излучающая линия только на больших расстояниях, по сравнению с которыми его поперечными размерами можно пренебречь. Только на таких расстояниях световые линии в этом случае спрямляются, а поверхности уровня квазипотенциала

превращаются в коаксиальные круговые цилиндры. Но поле такого цилиндра нигде не имеет потенциала, так как даже на больших расстояниях световой вектор зависит от направления в определяющей поле плоскости, перпендикулярной образующей цилиндра.

Рассмотрим теперь плоскую полосу, излучающую симметрично относительно своей нормали, светность R которой одинакова по всей ее поверхности. В пределах расстояний от полосы, значительно меньших ее длины,

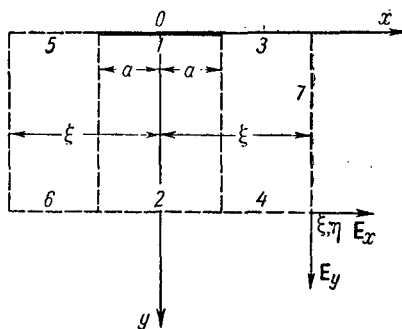


Рис. 60.

полосу, пренебрегая краевым эффектом, можно считать бесконечно длинной. Тогда световое поле можно принять за плоское, т. е. имеющее квазипотенциал. Световой вектор принципиально можно вычислить в любой точке поля по квазипотенциалу, но в общем случае полосы, симметрично излучающей по произвольному закону, определить вид поверхностей уровня квазипотенциала до построения поля затруднительно. Поэтому следует находить световой вектор по его составляющим. Для плоского поля нужны лишь две составляющие, которые в рассматриваемом случае удобно определить через освещенности двух плоскостей: параллельной полосе и перпендикулярной как полосе, так и плоскости поля.

По заданной индикатрисе излучающей полосы построим функцию $\varphi(u)$, пользуясь формулами (166) или (167). Затем, по (212), строим функцию $\psi(u)$, полагая, на основании принципа обратимости, $\epsilon(u) = \varphi(u)$. Аргумент функций φ и ψ обозначен здесь через u в отличие от координаты x . В перпендикулярной плоскости, содержащей световой вектор (рис. 60), расположим прямоугольную систему координат xOy с началом O в середине полосы, на одинаковом расстоянии a от ее краев. Найдем составляющие светового вектора в точке (ξ, η) при $\xi \geq a$. Через точку (ξ, η) проведем плоскость, парал-

лельную полосе, перпендикулярную к плоскости поля. Пусть E_x и E_y — составляющие светового вектора в точке (ξ, η) . Тогда

тельную полосу. Излучающую полосу обозначим цифрой 1, ее ортогональную проекцию на плоскость, содержащую точку (ξ, η) , — цифрой 2. Построим показанные на рисунке вспомогательные полосы 3 и 5 с их проекциями 4 и 6, а также полосу 7.

Световой вектор \mathbf{E} найдем по его составляющим E_x и E_y , величины которых равны освещенностям E_7 и E_4 полос 7 и 4 в точке (ξ, η) . Очевидно,

$$|\mathbf{E}_y| = R \left[\varphi \left(\frac{\xi + a}{\eta} \right) - \varphi \left(\frac{|\xi - a|}{\eta} \right) \right]. \quad (238)$$

Освещенность элемента $\xi d\eta$ полосы 7, находящегося на расстоянии η от излучающей плоскости, согласно (68),

$$E_7 = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{dF_{17}}{d\eta},$$

где ζ — длина полосы 7.

Световой поток

$$F_{17} = \frac{1}{2} [2R\zeta a - F_{1(2+4+6)}],$$

где световой поток, падающий от полосы 1 на совокупность полос 2, 4 и 6,

$$F_{1(2+4+6)} = F_{12} + F_{14} + F_{16}.$$

Замечая, что $F_{14} = F_{16}$, и пользуясь (213), получаем:

$$F_{1(2+4+6)} = F_{(1+3)(2+4)} - F_{34};$$

здесь

$$F_{(1+3)(2+4)} = R\zeta(\xi + a) \psi \left(\frac{\xi + a}{\eta} \right),$$

а

$$F_{34} = R\zeta |\xi - a| \psi \left(\frac{|\xi - a|}{\eta} \right).$$

Следовательно,

$$F_{17} = \frac{R\zeta}{2} \left[2a - (\xi + a) \psi \left(\frac{\xi + a}{\eta} \right) + |\xi - a| \psi \left(\frac{|\xi - a|}{\eta} \right) \right];$$

отсюда

$$\frac{dF_{17}}{d\eta} = \frac{R\zeta}{2\eta^2} \left[(\xi + a)^2 \frac{d\psi}{du} \Big|_{u = \frac{\xi+a}{\eta}} - (\xi - a)^2 \frac{d\psi}{du} \Big|_{u = \frac{|\xi-a|}{\eta}} \right]$$

$$|\mathbf{E}_x| = \frac{R}{2} \left[\Psi \left(\frac{\xi + a}{\eta} \right) - \Psi \left(\frac{|\xi - a|}{\eta} \right) \right], \quad (239)$$

где

$$\Psi(u) = u^2 \frac{d\psi(u)}{du}.$$

Пусть теперь $0 \leq \xi \leq a$; в этом случае

$$|\mathbf{E}_y| = R \left[\varphi \left(\frac{a + \xi}{\eta} \right) + \varphi \left(\frac{a - \xi}{\eta} \right) \right]. \quad (240)$$

Составляющая же \mathbf{E}_x имеет величину, равную разности освещенностей сторон полосы 7, освещаемых частями излучающей полосы, находящимися слева и справа от точки (ξ, η) . Рассуждая аналогично предыдущему, нетрудно найти, что в рассматриваемом случае

$$|\mathbf{E}_x| = \frac{R}{2} \left[\Psi \left(\frac{a + \xi}{\eta} \right) - \Psi \left(\frac{a - \xi}{\eta} \right) \right]. \quad (241)$$

Сопоставление полученных здесь выражений проекций светового вектора с формулами (175) позволяет связать квазипотенциал и интегрирующий множитель светового поля излучающей полосы с коэффициентами связи φ и ψ .

Выражения (239) и (241) показывают, что $\mathbf{E}_x = 0$ при $\xi = 0$, как и должно быть вследствие симметрии рассматриваемой полосы относительно оси Oy ; это будет и в точке пересечения оси Oy с полосой. В других точках излучающей полосы $\mathbf{E}_x \neq 0$, если существует тангенциальная составляющая светового вектора.

Точки, в которых может существовать тангенциальная составляющая светового вектора, имеют координаты $\xi \leq a$; $\eta = 0$.

При $\xi < a$ величина тангенциальной составляющей имеет выражение (241), а при $\xi = a$, т. е. на краю полосы, согласно (239) и (241),

$$|\mathbf{E}_x| = \frac{R}{2} \Psi \left(\frac{\xi + a}{\eta} \right). \quad (242)$$

На расстояниях, в сравнении с которыми шириной полосы можно пренебречь, она действует как излучающая лента. При этом, согласно (220),

$$\frac{E_7}{E_4} = \frac{\xi}{\eta},$$

т. е. световые линии совпадают с прямыми, проходящими через начало координат O . По формуле (219) в этом случае

$$E_4 = 2 \frac{L_y}{\Omega (\xi^2 + \eta^2)} \int_0^{\pi/2} f(\vartheta) \cos \gamma d\gamma, \quad (243)$$

где L , Ω и $f(\vartheta)$ — погонная плотность потока, эквивалентный телесный угол и индикатриса, характеризующие излучающую ленту.

Связь углов ϑ и γ определяется соотношениями (217), (218) и (223):

$$\cos \vartheta = \frac{\eta \cos \gamma}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}. \quad (244)$$

Рассмотрим теперь излучающую полосу, индикатриса которой имеет вид (147) при целом и положительном m , т. е. представляет один из членов ряда (148). Случай $m=0$ (излучение по закону Эйлера) рассмотрен далее особо (§ 30), как и случай $m=1$ (излучение по закону Ламберта, гл. пятая). Предположим, что целое число $m \geq 2$.

Поместим начало координат на краю полосы, расположив её в плоскости xOz и направив ось Ox перпендикулярно ее краям (рис. 61). Обозначая через u ширину полосы, найдем квазипотенциал в точке $(0, \eta, 0)$. По формуле (192), в этом случае

$$W(\eta; u) = \frac{R}{\pi} \int_0^u dx \int_0^\infty \frac{dz}{(x^2 + z^2 + \eta^2)^{\frac{m+1}{2}}}. \quad (245)$$

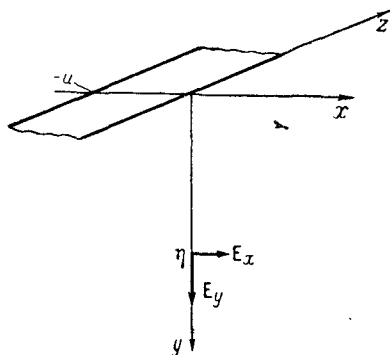


Рис. 61.

Заметим, что квазипотенциал (245) является нечетной функцией ширины полосы u , т. е.

$$W(\eta; u) = -W(\eta; -u), \quad u > 0. \quad (246)$$

Полагая $x^2 + \eta^2 = r^2$ и $\frac{z}{r} = \operatorname{tg} \tau$, получаем:

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{(x^2 + z^2 + \eta^2)^{\frac{m+1}{2}}} = \frac{1}{r^m} \int_0^{\pi/2} \cos^{m-1} \tau \, d\tau = \\ = 2^{m-2} B\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right) (x^2 + \eta^2)^{-m/2},$$

где $B\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right)$ — бета-функция.

Подставив этот результат в (245) и положив $x = \eta \operatorname{tg} \vartheta$, находим [Л. 391]:

$$W(\eta; u) = \frac{R}{\pi} 2^{m-2} B\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right) \frac{1}{\eta^{m-1}} \int_0^{\operatorname{arctg} u/\eta} \cos^{m-2} \vartheta \, d\vartheta, \quad (247)$$

где, как было принято, $m \geq 2$.

Формула (197) следует отсюда при $u \rightarrow \infty$ и удвоении результата:

$$W(\eta) = \frac{R}{\pi} 2^{2m-4} B\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right) B\left(\frac{m-1}{2}, \frac{m-1}{2}\right) \frac{1}{\eta^{m-1}};$$

подставляя сюда

$$B\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right) B\left(\frac{m-1}{2}, \frac{m-1}{2}\right) = \frac{\pi}{2^{2(m-2)}(m-1)}, \quad (248)$$

получаем квазипотенциал (197).

Применяя формулу (247) к расположению, представленному на рис. 60, находим квазипотенциал в точке (ξ, η) аналогично (193):

$$W(\xi, \eta; a) = W(\eta; \xi + a) - W(\eta; \xi - a). \quad (249)$$

Согласно (246), это выражение справедливо при любых значениях координаты ξ ; отсюда

$$W(\xi, \eta; a) = \frac{R}{\pi} 2^{m-2} B\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right) \frac{1}{\eta^{m-1}} \int_{\operatorname{arctg} \frac{\xi-a}{\eta}}^{\operatorname{arctg} \frac{\xi+a}{\eta}} \cos^{m-2} \vartheta \, d\vartheta.$$

Тогда проекции светового вектора в той же точке

$$E_x = \frac{R}{\pi} 2^{m-2} B\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right) \eta^m \left\{ [(\xi - a)^2 + \eta^2]^{-m/2} - [(\xi + a)^2 + \eta^2]^{-m/2} \right\}; \quad (250)$$

$$E_y = \frac{R}{\pi} 2^{m-2} B\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right) \left\{ \eta^{m-1} (\xi + a) [(\xi + a)^2 + \eta^2]^{-m/2} - \eta^{m-1} (\xi - a) [(\xi - a)^2 + \eta^2]^{-m/2} + (m-1) \int_{\arctg \frac{\xi-a}{\eta}}^{\arctg \frac{\xi+a}{\eta}} \cos^{m-2} \vartheta d\vartheta \right\}. \quad (251)$$

Из (250) следует, что $E_x = 0$ при $\xi = 0$, как и должно быть вследствие симметрии. При $\xi = \pm a$, $\eta = 0$, т. е. на краях полосы,

$$E_x = \pm \frac{R}{\pi} 2^{m-2} B\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right). \quad (252)$$

Таким образом, тангенциальная составляющая светового вектора, существующая на краях полосы, не зависит от ее ширины. Поэтому во всех остальных точках полосы данная составляющая равна нулю, как и было найдено в § 27 для $m \neq 0$.

Полагая в (251) $\xi = \eta = 0$ и для результат пополам, находим величину нормальной составляющей светового вектора на краю полосы:

$$E_y = \frac{R}{2} 2^{2m-5} (m-1) B\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right) B\left(\frac{m-1}{2}, \frac{m-1}{2}\right),$$

откуда, принимая во внимание (248), получаем:

$$E_y = \frac{R}{2}. \quad (253)$$

Это значение E_y не зависит от ширины полосы, вследствие чего во всех остальных ее точках $E_y = R$. Таким образом, на краях полосы нормальная составляющая светового вектора имеет скачок.

Из изложенного следует, что полоса, излучающая по рассматриваемому закону, является одной из поверхностей уровня квазипотенциала, как ранее установлено

Характеристики светового поля полосы в точке P по рис. 61

m	$W : R$	$ E_x : R$	$ E_y : R$
0	$-\frac{1}{\pi} \times$ $\times \left(u \ln \sqrt{u^2 + \eta^2} + \right.$ $\left. + \eta \operatorname{arctg} \frac{u}{\eta} \right)$	$\frac{1}{\pi} \ln \sqrt{1 + \frac{u^2}{\eta^2}}$	$\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{u}{\eta}$
1	$\frac{1}{2} \ln \frac{u + \sqrt{u^2 + \eta^2}}{\eta}$	$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\eta}{\sqrt{u^2 + \eta^2}} \right)$	$\frac{u}{2\sqrt{u^2 + \eta^2}}$
2	$\frac{1}{\pi\eta} \operatorname{arctg} \frac{u}{\eta}$	$\frac{u^2}{\pi(u^2 + \eta^2)}$	$\frac{1}{\pi} \left(\frac{u\eta}{u^2 + \eta^2} + \operatorname{arctg} \frac{u}{\eta} \right)$
3	$\frac{u}{4\eta^2 \sqrt{u^2 + \eta^2}}$	$\frac{1}{4} \left[1 - \frac{\eta^3}{\sqrt{(u^2 + \eta^2)^3}} \right]$	$\frac{1}{4} \left[\frac{u}{\sqrt{u^2 + \eta^2}} \times \right.$ $\left. \times \left(2 + \frac{\eta^2}{u^2 + \eta^2} \right) \right]$
4	$\frac{1}{3\pi\eta^2} \left(\frac{u}{u^2 + \eta^2} + \right.$ $\left. + \frac{1}{\eta} \operatorname{arctg} \frac{u}{\eta} \right)$	$\frac{1}{3\pi} \left[1 - \frac{\eta^4}{(u^2 + \eta^2)^2} \right]$	$\frac{1}{\pi} \left[\frac{u\eta(u^2 + 5\eta^2)}{3(u^2 + \eta^2)^2} + \operatorname{arctg} \frac{u}{\eta} \right]$
5	$u \frac{2u^2 + 3\eta^2}{16\eta^4 \sqrt{(u^2 + \eta^2)^3}}$	$\frac{3}{16} \left[1 - \frac{\eta^5}{\sqrt{(u^2 + \eta^2)^5}} \right]$	$u \frac{8u^4 + 20u^2\eta^2 + 15\eta^4}{16(u^2 + \eta^2)^3} \times$ $\times \sqrt{(u^2 + \eta^2)^3}$

в частном случае излучения по закону Ламберта [Л. 295]. Вид семейства поверхностей уровня зависит, как показывает выражение квазипотенциала (247), от m ; т. е. оказывается различным для геометрически одинаковых излучающих поверхностей в зависимости от закона излучения.

В табл. 8 приведены получаемые для m от 0 до 5 выражения отношений квазипотенциала (потенциала при $m=0$) и составляющих E_x и E_y светового вектора в точке P по рис. 61 к светности R . Выражения, относящиеся к $m=0$, взяты из § 30, а к $m=1$, — из главы пятой.

§ 29. Системы источников

Систему точечных источников, расположенных в одной плоскости, можно заменить для целей расчета освещения плоской фигурой, излучающей по тому же закону. Пусть точечные источники размещены равноотстоящими рядами на одинаковой высоте над некоторой плоскостью. Если высота мала по сравнению с размерами части освещаемой плоскости, над которой находятся источники, то, для расчета освещенности в центре этой части, систему источников можно считать бесконечной, а коэффициент освещенности считать равным единице по отношению к плотности потока (светности) плоскости, в которой расположены источники. Эта плотность потока равна потоку одного источника (в полусфере, обращенной к освещаемой плоскости), поделенному на площадь, приходящуюся на каждый источник [Л. 152]. Подобным же образом при этих условиях определяется освещенность от ряда равноотстоящих источников. Ряд точечных источников может быть заменен излучающей линией [Л. 161].

Рассмотрим систему, состоящую из n одинаковых симметричных точечных источников, фотометрические оси которых параллельны. Эти источники расположены на одной и той же высоте, принимаемой за единицу, над квадратом, сторона которого x . Источники образуют равноотстоящие ряды, параллельные сторонам квадрата. Если только один такой источник помещен над центром квадрата, коэффициент связи его с квадратом будет ϕ . Этот коэффициент связи может быть вычислен по

способу Руссо (§ 21) и будет зависеть от x . Если же n будет бесконечно велико, то система будет действовать как излучающая плоскость, элементами которой как бы являются ее источники. Коэффициент связи ψ такой системы с тем же квадратом может быть вычислен по способу, изложенному в § 26.

В промежуточном случае, если число источников конечно, но больше единицы, причем все источники расположены на одинаковых расстояниях, а расстояния крайних рядов от сторон квадрата вдвое меньше, то [Л. 152] коэффициент связи системы с освещенным квадратом

$$\eta = \frac{\varphi + (n-1)\psi}{n}. \quad (254)$$

Коэффициент η будет функцией индекса формы q , как и ψ , когда он слабо зависит от φ , т. е. при достаточно большом n .¹

При $n=1$ и $n \rightarrow \infty$ из (254) следуют предыдущие частные случаи. При $q \rightarrow \infty$, $\varphi = \psi$ и $\eta = 1$.

Ряд линейных источников также заменяется непрерывной излучающей линией [Л. 270], а совокупность таких рядов — излучающей плоскостью.

И наоборот, излучающая плоскость может быть заменена системой излучающих линий [Л. 390]. Таким образом можно найти составляющие светового вектора плоского излучателя произвольного очертания, подразделив его на параллельные излучающие полосы. Освещенности от каждой полосы выражаются формулами (219)—(221), как освещенность от ленты. Освещенность от рассматриваемого излучателя равна сумме соответственных освещенностей от полосок.

Система излучающих плоских фигур, например равноотстоящих прямоугольников, может быть заменена сплошной излучающей плоскостью, средняя светность которой определяется соотношением площадей заменяемых и заменяющей фигур [Л. 260, 271]. Этот прием применим, с некоторыми ограничениями, к расчету освещенности и, в особенности, светового потока.

¹ Для индикатрисы вида (147) значения η вычислены при m , изменяющемся от 0,473 до 13 [Л. 299].

§ 30. Излучение по закону Эйлера

Рассматривая индикатрису поверхности, излучающей по закону Эйлера, как частный случай закона излучения (147) при $m=0$, находим из (191), что в поле плоской излучающей фигуры s интегрирующий множитель $\mu=1$ и квазипотенциал (192) обращается в потенциал [Л. 36]

$$V = \frac{R}{2\pi} \int_s \frac{ds}{r}. \quad (255)$$

Найдем потенциал поля прямоугольника со сторонами u и v , излучающего по закону Эйлера и имеющего светность R , одинаковую по всей его площади. Расположив оси прямоугольной системы координат $Oxyz$, как показано на рис. 62, вычислим потенциал в точке $P(0, \eta, 0)$ т. е. на расстоянии η от вершины прямоугольника, измеренном по нормали к его плоскости. Согласно (255) и (187),

$$\begin{aligned} V(0, \eta, 0; u, v) &= \\ &= \frac{R}{2\pi} \int_0^u dx \int_0^v \frac{dz}{\sqrt{x^2 + \eta^2 + z^2}}, \end{aligned}$$

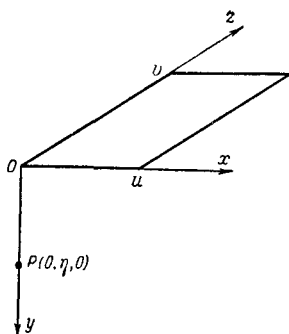


Рис. 62.

откуда [Л. 391]

$$\begin{aligned} V(\eta; u, v) &= \frac{R}{2\pi} \left[u \ln \frac{v + \sqrt{u^2 + v^2 + \eta^2}}{\sqrt{u^2 + \eta^2}} + \right. \\ &+ v \ln \frac{u + \sqrt{u^2 + v^2 + \eta^2}}{\sqrt{v^2 + \eta^2}} - \eta \operatorname{arctg} \frac{uv}{\eta \sqrt{u^2 + v^2 + \eta^2}} \left. \right]. \quad (256) \end{aligned}$$

Полагая здесь $v \rightarrow \infty$ и удваивая результат, получим, после преобразований, в которых отбрасываем члены, не содержащие координату η , выражение потенциала полосы, приведенное в табл. 8. Из него, при $u \rightarrow \infty$, получаем потенциал плоскости (184). Принимая затем, что ширина полосы $u=2a$, и переходя к расположению,

представленному на рис. 60, найдем, пользуясь формулой (249), потенциал

$$V(\xi, \eta; a) = \frac{R}{2\pi} \left\{ \xi \ln \frac{(\xi - a)^2 + \eta^2}{(\xi + a)^2 + \eta^2} - a \ln [(\xi^2 + a^2 + \eta^2)^2 - 4\xi^2 a^2] - 2\eta \left(\arctg \frac{\xi + a}{a} - \arctg \frac{\xi - a}{\eta} \right) \right\}. \quad (257)$$

Проекции светового вектора в той же точке, по формулам (175),

$$E_x = \frac{R}{2\pi} \ln \frac{(\xi + a)^2 + \eta^2}{(\xi - a)^2 + \eta^2}, \quad (258)$$

$$E_y = \frac{R}{\pi} \left(\arctg \frac{\xi + a}{\eta} - \arctg \frac{\xi - a}{\eta} \right). \quad (259)$$

При $\eta = 0$ формула (258) дает величину тангенциальной составляющей светового вектора:

$$E_x = \frac{R}{\pi} \ln \frac{a + \xi}{a - \xi}, \quad (260)$$

где $|\xi| < a$. Эта составляющая возрастает от 0 до $\pm\infty$ с увеличением координаты ξ от 0 до $\pm a$, т. е. с приближением к краям полосы.

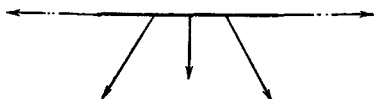


Рис. 63.

При этом световой вектор, направленный по нормали в середине полосы, постепенно отклоняясь от нормали, оказывается в плоскости полосы на ее краях (рис. 63). Хотя величина светового вектора на краю полосы бесконечно велика, световой поток в трубке, образуемой световыми линиями, начинающимися на краю и на некотором расстоянии от края полосы, имеет конечное значение на каждом конечном отрезке полосы.

Полагая в (258) и (259) $\xi = a = u/2$, получим выражения проекций светового вектора E_x и E_y , приведенные в табл. 8. Первую из них, т. е. E_x , легко получить также с помощью принципа обратимости, из формулы (170), удваивая в ней коэффициент связи ϕ , поскольку он относится к равномерному точечному источнику, излучаю-

шему в обе полусферы. Тогда, найдя коэффициент освещенности, указанный в табл. 8 для $m=0$,

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x, \quad (261)$$

где

$$x = \frac{u}{\eta},$$

получим, по (212), коэффициент связи плоскопараллельных полос в случае излучения по закону Эйлера:

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \left(\operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} \ln \sqrt{1+x^2} \right). \quad (262)$$

Пользуясь этим коэффициентом связи, можно получить выражение (258) также по формуле (239).

Коэффициент связи противоположных граней параллелепипеда может быть вычислен по (204). Если эти грани — квадратные основания со стороной x , а высота параллелепипеда принята за единицу, то для случая излучения по закону Эйлера [Л. 270]

$$\begin{aligned} \psi = 1 - \frac{2}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+2x^2}}{x^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{x} \ln \frac{\sqrt{1+x+x^2} \sqrt{1-x+2x^2}}{\sqrt{1-x+x^2} \sqrt{1+x+2x^2}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{x^2} \left(2 \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+2x^2} - 1 \right) \right]. \quad (263) \end{aligned}$$

Коэффициент связи двух параллельных коаксиальных дисков, один из которых, имеющий радиус x_0 , излучает по закону Эйлера, получим, обозначая радиус освещаемого круга через x , по (69):

$$\psi(x_0, x) = \frac{2}{x_0^2} \int_0^{x_0} \varphi(x, \xi) \xi d\xi, \quad (264)$$

где $\varphi(x, \xi)$ определяется по (164), причем оба радиуса должны быть выражены их отношениями к расстоянию между кругами. Интеграл (264) табулирован с помощью вычислительной машины [Л. 369].

Рассмотрим, наконец, излучающую линию в виде трубки, подчиняющейся закону Эйлера. В этом случае

индикатриса и эквивалентный телесный угол имеют выражения (77) и (80). Следовательно, по (219) и (221),

$$\left. \begin{aligned} dE_1 &= \frac{Lh_1}{4\pi r_0^2} \cos \gamma \, d\gamma; \\ dE_3 &= \frac{L}{4\pi r_0} \sin \gamma \, d\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (265)$$

Отсюда освещенности площадок *I*, *II* и *III* (рис. 56)

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{Lh_1}{4\pi r_0^2} \sin \gamma_0; \\ E_2 &= \frac{Lh_2}{4\pi r_0^2} \sin \gamma_0; \\ E_3 &= \frac{L}{4\pi r_0} (1 - \cos \gamma_0), \end{aligned} \right\} \quad (266)$$

где γ_0 — угол, под которым из точки *O* видна вся линия (рис. 56).

ГЛАВА ПЯТАЯ

ИСТОЧНИКИ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ, ИЗЛУЧАЮЩИЕ ПО ЗАКОНУ ЛАМБЕРТА

§ 31. Световое поле равноярких излучателей

Главнейшей особенностью поля равноярких излучателей, в котором можно пренебречь действием среды, является одинаковая яркость всех лучей, сходящихся в любой его точке. Вследствие этого световой вектор, создаваемый в какой-либо точке поля равнояркими поверхностями, излучающими через один и тот же контур, — одинаков. Световой вектор, следовательно, определяется здесь контуром, через который проходят создающие его лучи, но не зависит от вида ограничиваемой этим контуром излучающей поверхности. Поэтому, в частности, световое поле под равноярким куполом, занимающим телесный угол 2π , не отличается от поля равнояркой плоскости.

Согласно найденному в предыдущей главе, тангенциальная составляющая светового вектора равна нулю

во всех точках плоского равнояркого излучателя, а световой вектор в этих точках направлен по нормали к нему и равен ее светности по величине. Нетрудно убедиться, что эти условия соблюдаются на всякой выпуклой поверхности, излучающей по закону Ламберта, если только радиус кривизны ее не исчезающе мал [Л. 295]. Действительно, приближаясь к такой поверхности по нормали к ней, находим в пределе, когда расстояние до поверхности становится равным нулю, те же условия, что и на бесконечной, так же излучающей плоскости: лучи, образующие световой вектор, заполняют телесный угол 2π и имеют одинаковую яркость.

Из указанной особенности поля равноярких излучателей следует, далее, что для вычисления светового вектора можно заменять одну излучающую поверхность другой, ограниченной тем же контуром. Сложная криволинейная поверхность, например, ограниченная плоским контуром, может быть заменена плоским излучателем, поверхность, ограниченная окружностью — частью сферы, излучающей внутренней стороной. Применительно к заданному контуру равнояркого излучателя можно выбирать, таким образом, излучающую поверхность, наиболее удобную для вычисления светового вектора или других характеристик светового поля.

Из формулы (186), принимая во внимание (74) и (76), находим, что световой вектор равнояркой поверхности s , имеющей яркость B ,

$$E = B \int_s \frac{r}{r^3} \cos\vartheta ds.$$

Он может быть получен интегрированием по излучающей поверхности, которым пользовался еще Бугер [Л. 11].

Применяя этот метод к плоским излучателям, проще найти [Л. 124] квазипотенциал (192), а затем вычислить составляющие светового вектора по (175). Значительно удобнее, однако, находить световой вектор равнояркого излучателя из геометрических соотношений, полученных в теоретической фотометрии после Ламберта. В значительной части эти соотношения давно известны. И если, тем не менее, освещенность от равноярких поверхностей продолжают рассчитывать путем громоздкого

интегрирования [Л. 284, 288], то это свидетельство о неосведомленности авторов таких работ или об их консерватизме, приводящем к напрасным затратам времени и труда.

Предположим, что в точке O (рис. 64) находится вершина сходящегося пучка лучей, занимающего телесный угол ω , причем яркость всех лучей одинакова и равна B . Очевидно, что на любой поверхности, проходящей через точку O и не пересекающей пучка, будет освещенность, не зависящая от происхождения сходящихся лучей. Это могут быть лучи, идущие от поверхности s , излучающей по закону Ламберта с яркостью B ,

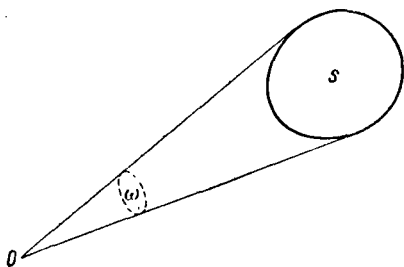


Рис. 64.

если между O и s — пустота. Это могут быть лучи, получившие одинаковую яркость B в результате прохождения через сильно рассеивающую среду, заполняющую телесный угол ω . Наконец, это могут быть лучи, идущие от любой другой поверхности, излучающей в пустоте по

закону Ламберта с яркостью B и видимой из точки O в пределах того же самого (по величине и положению) телесного угла ω .

Отсюда следует известное правило взаимозаменяемости поверхностей, равномерно излучающих в пустоте по закону Ламберта: поверхности, занимающие один и тот же телесный угол, дают в его вершине, на проходящей через нее плоскости, одинаковую освещенность. Это правило вытекает из закона подобия излучающих поверхностей (§ 24). Оно не распространяется на излучающую поверхность в виде конуса, ограничивающего рассматриваемый телесный угол. Из него следует указанная взаимозаменяемость равноярких поверхностей, ограниченных одним и тем же контуром.

По формуле (42), освещенность, производимая рассматриваемым пучком на какой-либо плоскости в точке O ,

$$E = B \int_{\omega} \cos \vartheta \, d\omega, \quad (267)$$

где ϑ — угол падения луча этого пучка, занимающего телесный угол $d\omega$.

В § 11 был выяснен геометрический смысл этого интеграла, представляющего проекцию телесного угла на освещаемую плоскость. Поэтому освещенность от поверхности, излучающей по закону Ламберта, равна произведению яркости и проекции на освещаемую плоскость телесного угла, в котором из освещаемой точки видна излучающая поверхность. Это положение известно под названием закона проекции телесного угла, который указал Кокс [Л. 38].

Вследствие того, что при соблюдении закона Ламберта во всех случаях применим принцип обратимости, здесь всегда имеет место численное равенство коэффициента связи точечного источника — площадки с

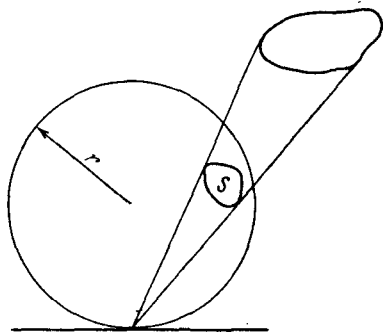


Рис. 65.

поверхностью и коэффициентом освещенности той же площадки от этой поверхности (§ 24). Поэтому все формулы, выражающие освещенность от поверхности, излучающей по закону Ламберта, применимы и к вычислению светового потока. Отсюда следует также [Л. 139], что коэффициент освещенности равен доле сферической поверхности любого радиуса r , касательной к освещаемой площадке, вырезаемой телесным углом, под которым с последней видна излучающая поверхность (рис. 65):

$$\varepsilon = \frac{S}{4\pi r^2}. \quad (268)$$

Это положение дает один из способов расчета освещенности от поверхности, подчиняющейся закону Ламберта, применимый наряду с законом проекции телесного угла и позволяющий в некоторых случаях производить вычисления с помощью сферической тригонометрии [Л. 223], а также построением стереографической проекции излучающих поверхностей [Л. 245].

Закон проекции телесного угла позволяет найти световой вектор равнояркой поверхности геометрическим путем. Иначе это можно сделать согласно (91), вычисляя вектор телесного угла. Чтобы найти световой вектор в точке O (рис. 64), нужно вычислить вектор телесного угла ω , образуемого конусом, имеющим в этой точке вершину и опирающимся на контур излучающей поверхности. Вектор ω по принятому для него направлению (§ 1) есть взятый по внутренней нормали вектор поверхности, вырезаемой рассматриваемым конусом на

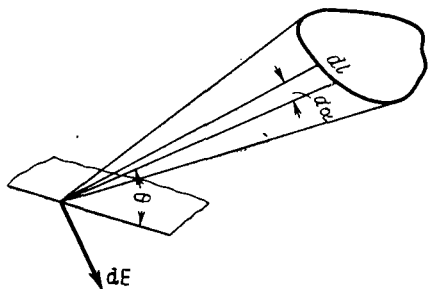


Рис. 66.

сфере единичного радиуса, совмещенной центром с вершиной конуса. Иначе ω равен взятому с обратным знаком вектору той же поверхности по внешней нормали, т. е. взятому по внешней нормали вектору конической поверхности, находящейся внутри сферы. Действительно,

сумма взятых по внешним нормальям векторов этой части конуса и вырезаемой им части сферы должна быть равна нулю, как вектор всякой замкнутой поверхности. Площадь элемента указанной части конической поверхности, выделенного двумя образующими, составляющими между собой угол $d\alpha$ (рис. 66), равна $1/2 d\alpha$. Введем вектор $d\alpha$, равный $d\alpha$ по величине и направленный по внешней нормали к взятому элементу конуса. Тогда вектор элемента конической поверхности равен $d\alpha/2$ и

$$\omega = \frac{1}{2} \int d\alpha,$$

где интеграл должен быть взят по всему конусу.

Искомый световой вектор, по (91),

$$\mathbf{E} = \frac{B}{2} \int d\alpha.$$

Его можно рассматривать как сумму элементарных световых векторов

$$d\mathbf{E} = \frac{B}{2} d\alpha, \quad (269)$$

каждый из которых направлен по внешней нормали к соответствующему элементу конуса. Поэтому освещенность какой-либо плоскости, проходящей через вершину конуса и не пересекающей его,

$$E = \frac{B}{2} \int \cos \theta \, dx, \quad (270)$$

где θ — угол между освещаемой плоскостью и коническим элементом.

Угол $d\alpha$ в (270) может быть определен, как угол, под которым элемент dl контура излучающей поверхности виден из освещаемой точки, а угол θ — как составляемый плоскостью, в которой измеряется угол $d\alpha$ с освещаемой плоскостью. Заметим, что угол θ по смыслу вывода формулы (270) должен быть измерен от внешней стороны конуса, образующего телесный угол, под которым контур излучающей поверхности виден из освещаемой точки. Выражение (270) известно под названием формулы Ямаути [Л. 116], а приведенный вывод ее дал Гершун [Л. 217]; существует графический прием ее применения [Л. 229].

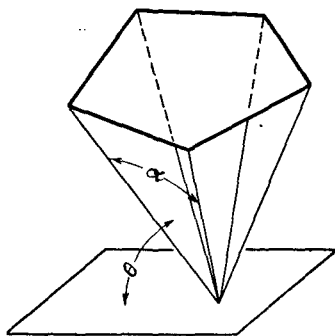


Рис. 67.

Рассмотрим теперь случай, когда контур излучающей поверхности — многоугольник (рис. 67). В пределах каждой стороны многоугольника угол θ будет постоянным. Интеграл из (270) даст для каждой стороны многоугольника выражение $\alpha_i \cos \theta_i$, где α_i — угол, под которым эта сторона видна из освещаемой точки. Поэтому из (270) следует, что освещенность

$$E = \frac{B}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \cos \theta_i, \quad (271)$$

где n — число сторон многоугольника. Это — формула Винера [Л. 44]. Ламберт дал ее для частного случая треугольника [Л. 12].

Известны выражения освещенности и для многих других частных случаев вида поверхности равномерной и неравномерной светотности, излучающей по закону Ламберта [Л. 53, 122, 159, 284, 355]. Разработаны также графические и графоаналитические приемы расчета освещенности от таких поверхностей любой формы и произвольно расположенных [Л. 136, 179, 272]. Для этой цели построены и приборы [Л. 270]. Некоторые приемы расчета основаны на замене очертания излучающей поверхности более простым контуром [Л. 175].

В случае равнояркого излучателя, имеющего плоский контур, три составляющие светового вектора могут быть

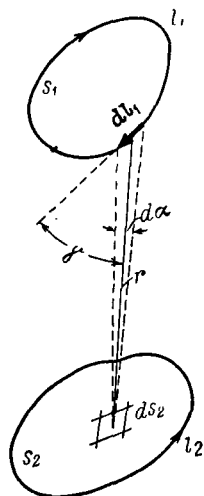


Рис. 68.

найжены суммированием освещенностей от параллельных полосок, на которые можно подразделить ограниченную этим контуром плоскую фигуру (§ 29). Для решения этой задачи известен также метод Ондрачека — Гольдштейна [Л. 158, 219].

Переходя к расчету светового потока, рассмотрим поверхность s_1 , равномерно излучающую с яркостью B . Создаваемый ею световой вектор в точке, где находится элемент ds_2 освещаемой поверхности s_2 , пусть будет E . Тогда световой поток, падающий на поверхность s_2 , согласно (84),

$$F_{12} = - \int_{s_2} \mathbf{E} \mathbf{n}_2 ds_2, \quad (272)$$

где \mathbf{n}_2 — единичный вектор нормали к ds_2 .

Поскольку световой вектор соленоидален, последний интеграл можно вычислить по (119):

$$\int_{s_2} \mathbf{E} \mathbf{n}_2 ds_2 = \oint_{l_2} \mathbf{A} dl_2 \quad (273)$$

где dl_2 — вектор элемента контура l_2 поверхности s_2 ;

\mathbf{A} — вектор-потенциал светового вектора.

Чтобы найти вектор-потенциал \mathbf{A} , представим световой вектор в виде вихря [Л. 217]. Обратимся к формуле (269) и преобразуем входящий в нее угол da (рис. 68). Обозначим через r расстояние от ds_2 до элемента dl_1 контура l_1 поверхности s_1 , который из ds_2 виден под углом da , и введем вектор \mathbf{r} этого расстояния, направив

его от dl_1 к ds_2 , а также вектор $d\mathbf{l}_1$, направленный по направлению обхода контура l_1 . Обозначим через γ угол между $d\mathbf{l}_1$ и \mathbf{r} ; тогда

$$dx = \frac{dl_1 \sin \gamma}{r}.$$

Заметим, что произведение $dl_1 \sin \gamma$ равно величине векторного произведения $d\mathbf{l}_1$ и \mathbf{r}/r . Это произведение представляет вектор, направленный перпендикулярно плоскости, содержащей dl_1 и \mathbf{r} ; чтобы направление этого вектора совпадало с направлением элементарного светового вектора $d\mathbf{E}$, определяемого по (269), направление обхода контура l_1 , т. е. направление вектора $d\mathbf{l}_1$, должно быть таким, как показано на рис. 68; тогда

$$d\mathbf{E} = \frac{B}{2} \frac{\left[d\mathbf{l}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right]}{r} = \frac{B}{2} \left[d\mathbf{l}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^2} \right].$$

Заметим еще, что

$$\frac{\mathbf{r}}{r^2} = \nabla \ln r.$$

Далее

$$[d\mathbf{l}_1 \cdot \nabla \ln r] = \ln r \cdot \text{rot } d\mathbf{l}_1 - \text{rot} (\ln r \cdot d\mathbf{l}_1).$$

С другой стороны,

$$\text{rot } d\mathbf{l}_1 = 0;$$

тогда

$$d\mathbf{E} = -\frac{B}{2} \text{rot} (\ln r \cdot d\mathbf{l}_1).$$

Отсюда световой вектор

$$\mathbf{E} = \oint_{l_1} d\mathbf{E} = -\frac{B}{2} \text{rot} \oint_{l_1} \ln r d\mathbf{l}_1.$$

Следовательно, искомый вектор-потенциал

$$\mathbf{A} = -\frac{B}{2} \oint_{l_1} \ln r d\mathbf{l}_1.$$

Эту формулу получил В. А. Фок [Л. 109]. Из формул (119) и (272) теперь получаем:

$$F_{12} = \frac{B}{2} \int_{l_1} \int_{l_2} \ln r d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2, \quad (274)$$

формулу, впервые выведенную Р. Германом [Л. 60], представляющую значительные преимущества для вычислений заменой двойного интеграла по площади, который необходимо вычислить по (65) и (64), т. е. четырехкратного интеграла, двойным контурным интегралом. Направление обхода контура l_2 должно быть таким, при котором положительное направление нормали к ds_2 обращено к излучающей поверхности.

Для расчета световых потоков предложены также графические методы [Л. 197]. Рассмотрен ряд частных случаев, в том числе, применительно к естественному освещению, расчет потока плоской фигуры произвольного очертания на прямоугольник [Л. 86].

Как видно из формулы (92), коэффициент связи поверхности s_1 с поверхностью s_2 [Л. 232]

$$\psi_{12} = \frac{G}{\pi s_1}, \quad (275)$$

что вытекает также из (67) и (63). Эту формулу можно рассматривать как выражение вероятности облучения поверхности s_2 поверхностью s_1 , т. е. вероятности того, что луч, идущий с поверхности s_1 , попадает на поверхность s_2 . Из (275) непосредственно следует (83), так как поток вектора телесного угла G не зависит от того, какая поверхность излучает.

Заметим, наконец, что, пользуясь правилом взаимозаменяемости равноярких поверхностей, легко найти световой поток, падающий на площадь s_0 плоского выходного отверстия вогнутой излучающей поверхности s : он составляет часть s_0/s ее полного потока. Следовательно, коэффициент самосвязи такой поверхности

$$\psi_{ss} = 1 - \frac{s_0}{s}. \quad (276)$$

Коэффициенты освещенности и связи, характеризующие равнояркие поверхности, могут быть измерены глобоскопом [Л. 371].

§ 32. Прямоугольные излучатели

Рассмотрим применение формулы Винера к случаю, показанному на рис. 69, где изображен излучающий прямоугольник со сторонами x и y , точка O — ортогональная проекция одной из вершин прямоугольника на параллельную ему плоскость III , проведенную на расстоя-

нии, принятом за единицу, а в этой точке — перпендикулярные прямоугольнику площадки I и II , параллельные сторонам прямоугольника x и y . Пирамида, ограничивающая телесный угол, под которым виден излучающий прямоугольник из освещаемой точки, имеет четыре грани, центральные углы которых — $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и α_4 . Для плоскости I угол $\theta_1 = 0, \theta_2 = \theta_4 = \frac{\pi}{2}, \theta_3 = \pi - \alpha_4$ (от внешней стороны третьей грани). Следовательно, освещенность этой плоскости

$$E_I = \frac{B}{2} (\alpha_1 - \alpha_3 \cos \alpha_4).$$

Так же находим

$$E_{II} = \frac{B}{2} (\alpha_4 - \alpha_2 \cos \alpha_1);$$

$$E_{III} = \frac{B}{2} \times \\ \times (\alpha_2 \sin \alpha_1 + \alpha_3 \sin \alpha_4).$$

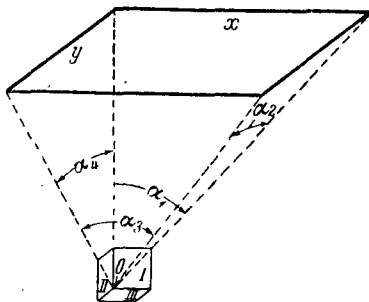


Рис. 69.

Три найденные освещенности представляют составляющие светового вектора \mathbf{E} , создаваемого прямоугольником в точке O , по нормальям к площадкам I, II, III , т. е.

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{E_I^2 + E_{II}^2 + E_{III}^2}.$$

Если далее нужно рассчитать освещенность на какой-либо другой плоскости, то она может быть найдена как проекция вектора \mathbf{E} на нормаль к этой плоскости или по (174), если только освещаемая плоскость не пересекает прямоугольник xy . В последнем случае прямоугольник, для освещаемой плоскости, становится многоугольником и освещенность может быть найдена непосредственно по формуле Винера, а также разбивкой части прямоугольника, излучение которой надо учитывать, на треугольники [Л. 258]. Случай наклонного прямоугольника был изучен особо [Л. 101, 114, 366].

Заметим, наконец, что освещенности E_I, E_{II} и E_{III} зависят только от углов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и α_4 и могут быть представлены в функции x и y . Получающиеся при этом

выражения известны под названием формул Хигби [Л. 114], хотя их вывел еще Герман [Л. 60], а Бордони, также опубликовавший их значительно раньше, дал графики семейства кривых $\epsilon = \text{const}$ в координатах x, y для горизонтального и вертикального прямоугольников [Л. 71]; Е. С. Ратнер построил такие графики в более удобном логарифмическом масштабе [Л. 191]. Выражения освещенности в точке, которая проектируется в одну из вершин прямоугольника, применимы и к другим расположениям с помощью формулы (194).

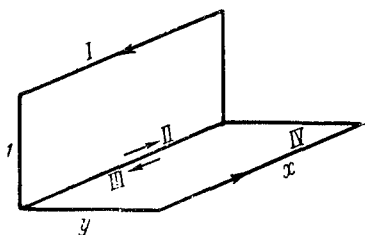


Рис. 70.

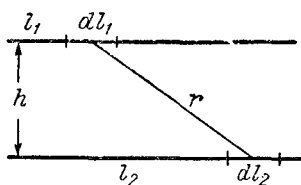


Рис. 71.

Предложено также приближенное выражение коэффициента освещенности от прямоугольной полосы в виде произведения двух множителей, один из которых зависит только от x , а другой — только от y [Л. 160]. Применительно к расчету естественного освещения удобное графическое решение дал А. М. Данилюк [Л. 249]. Для уточнения этого расчета был произведен ряд исследований распределения яркости по небу [Л. 200, 257], что позволило рассматривать прямоугольные светопроемы как подчиняющиеся закону Ламберта излучатели неравномерной светности [Л. 365, 384, 386].

Обращаясь теперь к расчету световых потоков, разберем пример применения формулы (274) к случаю двух прямоугольников [Л. 146, 156, 236], изображенных на рис. 70, у одного из которых длина одной стороны принята за единицу. В этом случае оба контура состоят из прямых и интеграл может быть разбит на сумму интегралов, вычисляемых между каждой парой сторон того или другого прямоугольника. Для перпендикулярных сторон 1 и 2 такие интегралы равны нулю, так как

$$dl_1 dl_2 = 0,$$

а для параллельных подынтегральное выражение равно

$$\pm \ln r \cdot d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2,$$

где знак зависит от направления обхода. Последнее должно быть выбрано в соответствии с направлением нормалей одинакового знака. Такими нормальными будут нормали к излучающей и освещаемой сторонам.

На рис. 70 показано направление обхода, одинаковое по этому признаку для обоих контуров. Таким образом, нужно вычислить интегралы между следующими сторонами, отмеченными на рисунке:

$$\begin{aligned} I \text{ и } III &— \text{знак } +; \\ I \text{ и } IV &— \text{знак } -; \\ II \text{ и } III &— \text{знак } -; \\ II \text{ и } IV &— \text{знак } +. \end{aligned}$$

На рис. 71 представлены отдельно две такие стороны и элементы dl_1 и dl_2 , находящиеся на расстояниях l_1 и l_2 от начала той и другой. Если h — расстояние между сторонами, то

$$r = \sqrt{h^2 + (l_2 - l_1)^2}.$$

В этом случае двойной интеграл, входящий в (274), имеет вид:

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^x \ln r dl_1 dl_2 &= \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^x \ln [h^2 + (l_2 - l_1)^2] dl_1 dl_2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[4hx \operatorname{arctg} \frac{x}{h} - h^2 \ln \frac{h^2 + x^2}{h^2} + x^2 \ln(h^2 + x^2) - 3x^2 \right]. \end{aligned} \quad (277)$$

Расстояние h имеет, как легко найти из рис. 70, следующие значения для пар сторон, между которыми нужно вычислить интеграл:

$$\begin{aligned} I \text{ и } III &— h = 1; \\ I \text{ и } IV &— h = \sqrt{1 + y^2}; \\ II \text{ и } III &— h = 0; \\ II \text{ и } IV &— h = y. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения h в (277), складывая результаты и умножая сумму на $B/2$, находим после упрощений:

$$F_{12} = B \left[x \left(\operatorname{arctg} x + y \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \sqrt{1+y^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1+y^2}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \ln \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2)(1-y^2)} + \frac{y^2}{4} \ln \frac{y^2(1+x^2+y^2)}{(1+y^2)(x^2+y^2)} - \right. \\ \left. - \frac{x^2}{4} \ln \frac{x^2(1+x^2+y^2)}{(1+x^2)(x^2+y^2)} \right]. \quad (278)$$

Положим теперь, что сторона, длина которой принята за единицу, имеет длину c и

$$x = \frac{a}{c}, \quad y = \frac{b}{c}.$$

Тогда формула (278) приводится к виду, полученному Ламбертом [Л. 12]:

$$F_{12} = 2B [b^2 \varphi(\beta_1) + c^2 \varphi(\beta_3) - (b^2 + c^2) \varphi(\beta_2)], \quad (279)$$

где функция Ламберта

$$\varphi(\beta) = \frac{1}{2} \left(\beta \operatorname{tg} \beta - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \beta \ln \sin \beta + \frac{1}{2} \ln \cos \beta \right), \quad (280)$$

причем

$$\beta_1 = \operatorname{arctg} \frac{a}{c};$$

$$\beta_2 = \operatorname{arctg} \frac{a^2}{\sqrt{b^2 + c^2}};$$

$$\beta_3 = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}.$$

Существует краткая таблица функции $\varphi(\beta)$ [Л. 115].

Ямаути преобразовал формулу (279) к более простому виду, введя [Л. 146] функцию

$$\Phi(\beta) = \varphi(\beta) \operatorname{ctg}^2 \beta, \quad (281)$$

значения которой приведены в табл. 9.

Тогда

$$F_{12} = 2Ba^2 [\Phi(\beta_1) - \Phi(\beta_2) + \Phi(\beta_3)]. \quad (282)$$

Функция Ламберта — Ямаути [Л. 146, 293]

$\operatorname{tg} \beta$	$\Phi(\beta)$	$\operatorname{tg} \beta$	$\Phi(\beta)$	$\operatorname{tg} \beta$	$\Phi(\beta)$
0,00	∞	0,46	0,57337	0,92	0,41115
0,01	1,5263	0,47	0,56817	0,93	0,40874
0,02	1,3530	0,48	0,56309	0,94	0,40636
0,03	1,2517	0,49	0,55812	0,95	0,40401
0,04	1,1798	0,50	0,55326	0,96	0,40169
0,05	1,1240	0,51	0,54850	0,97	0,39940
0,06	1,0784	0,52	0,54384	0,98	0,39714
0,07	1,0399	0,53	0,53927	0,99	0,39491
0,08	1,0066	0,54	0,53480	1,00	0,39270
0,09	0,97715	0,55	0,53042	1,01	0,39052
0,10	0,95085	0,56	0,52612	1,02	0,38837
0,11	0,92707	0,57	0,52190	1,03	0,38624
0,12	0,90537	0,58	0,51777	1,04	0,38413
0,13	0,88541	0,59	0,51371	1,05	0,38206
0,14	0,86693	0,60	0,50973	1,06	0,38000
0,15	0,84975	0,61	0,50581	1,07	0,37797
0,16	0,83368	0,62	0,50197	1,08	0,37596
0,17	0,81859	0,63	0,49820	1,09	0,37398
0,18	0,80437	0,64	0,49449	1,10	0,37203
0,19	0,79093	0,65	0,49085	1,12	0,36815
0,20	0,77819	0,66	0,48727	1,14	0,36439
0,21	0,76607	0,67	0,48374	1,16	0,36067
0,22	0,75453	0,68	0,48028	1,18	0,35707
0,23	0,74351	0,69	0,47687	1,20	0,35352
0,24	0,73297	0,70	0,47352	1,22	0,35008
0,25	0,72268	0,71	0,47022	1,24	0,34667
0,26	0,71316	0,72	0,46697	1,25	0,34498
0,27	0,70383	0,73	0,46378	1,26	0,34333
0,28	0,69485	0,74	0,46063	1,28	0,34007
0,29	0,68619	0,75	0,45753	1,30	0,33688
0,30	0,67784	0,76	0,45448	1,32	0,33377
0,31	0,66976	0,77	0,45147	1,34	0,33068
0,32	0,66195	0,78	0,44851	1,36	0,32766
0,33	0,65439	0,79	0,44559	1,38	0,32472
0,34	0,64706	0,80	0,44272	1,40	0,32181
0,35	0,63995	0,81	0,43988	1,42	0,31896
0,36	0,63305	0,82	0,43708	1,44	0,31618
0,37	0,62634	0,83	0,43433	1,46	0,31344
0,38	0,61982	0,84	0,43161	1,48	0,31074
0,39	0,61348	0,85	0,42893	1,50	0,30804
0,40	0,60731	0,86	0,42629	1,55	0,30168
0,41	0,60129	0,87	0,42368	1,60	0,29555
0,42	0,59543	0,88	0,42111	1,65	0,28967
0,43	0,58971	0,89	0,41857	1,70	0,28401
0,44	0,58413	0,90	0,41606	1,75	0,27858
0,45	0,57869	0,91	0,41359	1,80	0,27338

$\operatorname{tg} \beta$	$\Phi (\beta)$	$\operatorname{tg} \beta$	$\Phi (\beta)$	$\operatorname{tg} \beta$	$\Phi (\beta)$
1,85	0,26835	3,2	0,18022	6,5	0,10087
1,90	0,26354	3,3	0,17598	7,0	0,09344
1,95	0,25888	3,4	0,17194	7,5	0,08909
2,00	0,25439	3,5	0,16807	8,0	0,08418
2,05	0,25009	3,6	0,16440	8,5	0,07981
2,10	0,24590	3,7	0,16088	9,0	0,07585
2,15	0,24186	3,8	0,15749	9,5	0,07227
2,20	0,23796	3,9	0,15425	10	0,06903
2,25	0,23418	4,0	0,15117	11	0,06334
2,30	0,23052	4,2	0,14539	12	0,05853
2,35	0,22698	4,4	0,14000	13	0,05440
2,40	0,22357	4,6	0,13500	14	0,05082
2,50	0,21699	4,8	0,13036	15	0,04369
2,60	0,21083	5,0	0,12595	20	0,03646
2,70	0,20500	5,2	0,12211	25	0,02953
2,80	0,19950	5,4	0,11815	30	0,02481
2,90	0,19430	5,6	0,11454	40	0,01881
3,0	0,18936	5,8	0,11118	50	0,01517
3,1	0,18467	6,0	0,10802	100	0,00770

Как видно, выражения (279) и (282) симметричны относительно b и c , что и должно быть по принципу обратимости, поскольку a — общая сторона граней 1 и 2.

Формулы (278) и (282) позволяют рассчитать потоки, падающие с каждой грани параллелепипеда, изображенного на рис. 52, на все остальные. Занумеруем верхнее и нижнее основания соответственно цифрами 1 и 6, одну пару противоположных боковых граней четными цифрами 2 и 4, а другую — нечетными 3 и 5. Тогда, по соображениям симметрии, предполагая яркость всех граней одинаковой, можно написать:

$$F_{21} = F_{26} = F_{41} = F_{46};$$

$$F_{31} = F_{36} = F_{51} = F_{56}.$$

Меняя местами x и y , найдем поток F_{13} . Полный световой поток граней 1 и 6

$$F_1 = F_6 = \pi Bxy.$$

На грань 1 от совокупности граней 2, 3, 4 и 5 падает поток

$$2(F_{21} + F_{31}) = 2(F_{12} + F_{13}).$$

По принципу обратимости такой же поток будет падать на совокупность этих граней от грани 1. Отсюда находим поток, падающий с грани 1 на грань 6:

$$F_{16} = F_1 - 2(F_{12} + F_{13}), \quad (283)$$

что после подстановки выражений потоков F_1 , F_{12} и F_{13} даст возможность найти коэффициент связи

$$\psi_{16} = \psi_{61} = \frac{F_{16}}{F_1}.$$

Выражение этого коэффициента связи между двумя параллельными прямоугольниками, каждый из которых является ортогональной проекцией другого, имеет вид [Л. 95]:

$$\begin{aligned} \psi_{16} = \frac{2}{\pi} & \left[\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{1 + x^2}} + \right. \\ & + \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 + y^2}} - \frac{1}{y} \operatorname{arctg} x - \\ & \left. - \frac{1}{x} \operatorname{arctg} y - \frac{1}{2xy} \ln \frac{1 + x^2 + y^2}{(1 + x^2)(1 + y^2)} \right]. \quad (284) \end{aligned}$$

Другую форму этого выражения можно получить из (282):

$$\psi_{16} = \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{x}{y} [\Phi(\beta_2) - \Phi(\beta_1)] + \frac{y}{x} [\Phi(\beta_4) - \Phi(\beta_5)] \right\}, \quad (285)$$

где

$$\beta_1 = \operatorname{arctg} x; \quad \beta_2 = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 + y^2}};$$

$$\beta_4 = \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{1 + x^2}}; \quad \beta_5 = \operatorname{arctg} y.$$

Коэффициент связи граней 1 и 2, находимый делением потока F_{12} на поток F_1 ,

$$\psi_{12} = \frac{2x}{\pi y} [\Phi(\beta_1) - \Phi(\beta_2) + \Phi(\beta_3)]. \quad (286)$$

При $x = y$ из (284) получается выражение коэффициента связи ψ излучающего квадрата с его ортогональной проекцией, находящейся на единичном расстоянии. Подстановкой $\text{arctg } x = \alpha$ это выражение приводится к виду, указанному И. С. Дубинкиным [Л. 205]:

$$\psi_{16} = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\text{arctg } \sin \alpha}{\sin \alpha} - \alpha \text{ctg } \alpha - \frac{\text{ctg}^2 \alpha}{4} \ln(1 - \sin^4 \alpha) \right], \quad (287)$$

что легко получить и из (285). При $x = 1$ отсюда следует, что коэффициент связи противоположных граней куба равен $1/5$ с точностью $0,1\%$ [Л. 144].

По Хоттелю [Л. 148], коэффициент связи оснований 1 и 6 с неравными сторонами x и y

$$\psi(x, y) \approx \sqrt{\psi(x) \cdot \psi(y)} \quad (288)$$

(с точностью 1%), где $\psi(x)$ и $\psi(y)$ — коэффициент связи по формуле (287) для квадратов со сторонами x и y .

Имея возможность вычислять потоки между гранями параллелепипеда, можно решить ряд других задач, относящихся к вычислению потоков, падающих с одного прямоугольника на другой [Л. 212, 368]. Закон Ламберта позволяет широко пользоваться при этом принципом обратимости. Пусть, например, нужно найти поток, падающий с прямоугольника 1 на прямоугольник 2 (рис. 72). Добавив показанные пунктиром прямоугольники $1'$ и $2'$, найдем, что поток, падающий от совокупности прямоугольников 1 и $2'$ на совокупность прямоугольников $1'$ и 2 ,

$$F = F_{11'} + F_{12} + F_{2'2} + F_{2'1'} \quad (289)$$

По геометрическим соображениям, $F_{2'1'} = F_{21}$, так как контурные интегралы, выражающие оба потока, почленно (по парам сторон) совпадают. С другой стороны, по принципу обратимости, $F_{21} = F_{12}$. Поскольку

потоки F , $F_{11'}$ и $F_{2'2}$ могут быть вычислены по уже известным формулам, поток F_{12} легко найти из (289):

$$F_{12} = \frac{F - F_{11'} - F_{2'2}}{2}.$$

§ 33. Шар, излучающий внутренней поверхностью, и излучающие диски

Положим, что внутренняя поверхность шара радиуса r излучает по закону Ламберта, имея яркость B . Рассматривая элемент ds этой поверхности (рис. 73) как точечный источник

и имея в виду, что его индикатриса — окружность, находим, согласно установленному в § 19, что сфера является равноосвещенной поверхностью для каждого своего элемента. Освещенность в какой-либо точке сферы поэтому одинакова от всех ее элементов. Эту освещенность dE от каждого из элементов легко найти, подсчитав ее в противоположной элементу точке P , находящейся на расстоянии $2r$, куда направлена от элемента сила света (по нормали), равная $B ds$. Следовательно, освещенность

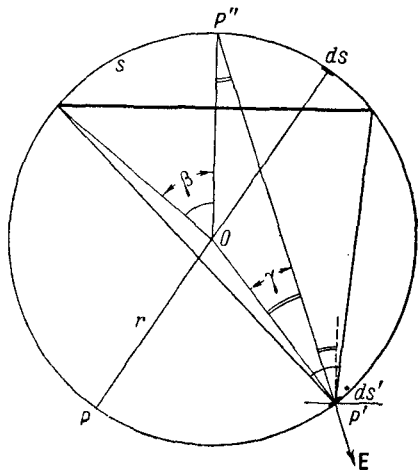


Рис. 73.

$$dE = \frac{B ds}{4r^2}.$$

Отсюда легко найти освещенность сферы от какой-либо части ее поверхности:

$$E = \frac{Bs}{4r^2},$$

или

$$E = \frac{Rs}{4\pi r^2}. \quad (290)$$

По правилу взаимозаменяемости (§ 31) это будет вместе с тем освещенность сферы или касательной к ней плоскости от любой поверхности, видимой из рассматриваемой точки в пределах телесного угла, вырезающего на сфере поверхность s .

Предположим, что s — часть сферической поверхности, отсекаемая плоскостью, как показано на рис. 73. По правилу взаимозаменяемости, ту же освещенность E будет производить во всех точках остальной части сферы диск, вырезаемый сферой из секущей плоскости, имеющей яркость B . Возьмем точку P' . В нее от диска или от s приходит сходящийся пучок лучей, заполняющий эллиптический конус, имеющий вершину в P' и опирающийся на s . Вследствие симметрии, световой вектор \mathbf{E} этого пучка должен быть направлен по оси конуса $P'P''$, делящей угол, под которым из P' виден диаметр диска, пополам. Соединив точку P' с центром O шара, т. е. построив нормаль к сфере в этой точке, найдем угол γ между направлением нормали и направлением светового вектора, как показано на рисунке; тогда

$$|\mathbf{E}| = \frac{E}{\cos \gamma}.$$

С другой стороны,

$$s = 2\pi r^2 (1 - \cos \beta) = 4\pi r^2 \sin^2 \frac{\beta}{2},$$

где β — угол, под которым радиус диска виден из центра шара; отсюда

$$|\mathbf{E}| = R \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{\cos \gamma}. \quad (291)$$

Вписанный угол, под которым диаметр рассматриваемого диска виден из точки P' , равен углу β . С другой стороны, из равнобедренного треугольника $P'OP''$ видно, что γ — угол между световым вектором \mathbf{E} и нормалью OP'' к плоскости диска. Следовательно, освещенность плоскости, параллельной диску, в точке P'

$$\mathbf{E} = R \sin^2 \frac{\beta}{2}. \quad (292)$$

Легко заметить, что эта освещенность равна освещенности сферы [Л. 84].

Последнюю формулу дал Бурхард [Л. 98], а затем получил также С. О. Майзель [Л. 105]. Она применима, как и формула (291), если освещаемая плоскость не пересекает плоскости диска. В противном случае освещенность каждой стороны площадки ds' должна быть вычислена от освещающей эту сторону части диска [Л. 373]. Формула (291) позволяет найти освещенность любой плоскости, не пересекающей диска, на любом расстоянии от него.

Из (292) следует, что коэффициент освещенности от диска в точке P' параллельной ему плоскости

$$\varepsilon = \sin^2 \frac{\beta}{2}. \quad (293)$$

Если поместить в P' точечный источник, имеющий индикатрису (74), фотометрическая ось которого перпендикулярна плоскости диска, то, по принципу обратимости, коэффициент связи его с диском

$$\varphi = \sin^2 \frac{\beta}{2}. \quad (294)$$

Формула (292) позволяет, следовательно, находить световой поток, падающий на диск от такого источника [Л. 217].

Световой поток, падающий на элемент ds' сферической поверхности, взятой в точке P' , от s , будет $dF = E ds'$. Световой поток, падающий от части s_1 на часть s_2 сферической поверхности, равен, следовательно,

$$F_{12} = \frac{R s_1 s_2}{4\pi r^2}, \quad (295)$$

т. е. пропорционален произведению излучающей и освещаемой частей поверхности. Эту зависимость, как и (290), получил Сэмнер [Л. 54].

Если s_1 и s_2 — шаровые сегменты, то F_{12} — поток между дисками 1 и 2, получаемыми в сечении сферы плоскостями, образующими эти сегменты. Введя углы β_1 и β_2 , под которыми радиусы дисков видны из центра шара, имеем из (295):

$$F_{12} = 4\pi r^2 R \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \sin^2 \frac{\beta_2}{2}. \quad (296)$$

Замечая далее, что полный световой поток первого диска

$$F_1 = \pi r^2 R \sin^2 \beta_1 = 4\pi r^2 R \sin^2 \frac{\beta_1}{2} \cos^2 \frac{\beta_1}{2},$$

найдем коэффициент связи первого диска со вторым:

$$\psi_{12} = \frac{\sin^2 \frac{\beta_2}{2}}{\cos^2 \frac{\beta_1}{2}} = \frac{1 - \cos \beta_2}{1 + \cos \beta_1}. \quad (297)$$

Эту формулу дал Уэлли [Л. 143], рассмотревший и другие задачи на освещение от равнояркого диска [Л. 99].

В частном случае параллельных дисков, формулу (296) можно преобразовать, введя их радиусы r_1 и r_2 и расстояние h между их плоскостями; тогда

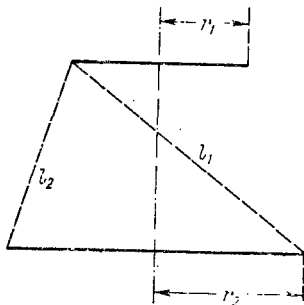


Рис. 74.

$$F_{12} = \frac{\pi}{2} R \left[r_1^2 + r_2^2 + h^2 - \sqrt{(r_1^2 + r_2^2 + h^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2} \right]. \quad (298)$$

Эта формула выведена Ламбертом [Л. 12] и исследована рядом авторов [Л. 99, 141]. Герман привел ее [Л. 60] к простейшему виду:

$$F_{12} = \frac{\pi}{4} (l_1 - l_2)^2, \quad (299)$$

где l_1 и l_2 — наибольшее и наименьшее расстояния между точками первого и второго дисков (рис. 74). Отсюда коэффициент связи

$$\psi_{12} = \left(\frac{l_1 - l_2}{2r_1} \right)^2. \quad (300)$$

§ 34. Цилиндры, излучающие внутренней поверхностью

Рассмотрим цилиндрическую поверхность, ограниченную замкнутыми плоскими направляющими контурами, расположенными в параллельных плоскостях (рис. 75), нормальных ее образующей. Пусть s_1 и s_2 —

одинаковые площади, ограниченные каждым из этих контуров, z — расстояние между их плоскостями. Если ψ_{12} — коэффициент связи тех же контуров, то, по (207), коэффициент связи верхнего основания цилиндра и цилиндрической полосы ds_3 , образуемой приращением dz расстояния z ,

$$\psi_{13} = -\psi'_{12} dz, \quad (301)$$

где

$$\psi'_{12} = \frac{d\psi_{12}}{dz}.$$

Тогда, поскольку рассматриваемые поверхности равнояркие, применяя формулу (83), получаем:

$$-s_1 \psi'_{12} dz = \psi_{31} ds_3,$$

где ψ_{31} — коэффициент связи полосы ds_3 с верхним основанием цилиндра.

Из последнего соотношения, вводя периметр p оснований, получаем [Л. 180], полагая $s_1 = s_2 = s$:

$$\psi_{31} = -\frac{s}{p} \psi'_{12}. \quad (302)$$

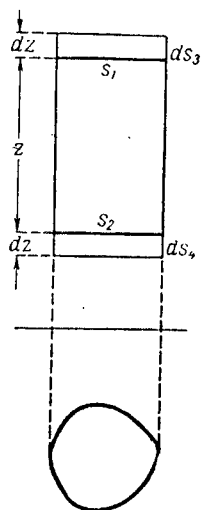


Рис. 75.

Образует теперь цилиндрическую полосу ds_4 (рис. 75). Коэффициент связи полос ds_3 и ds_4

$$\psi_{34} = -\psi'_{31} dz, \quad (303)$$

где

$$\psi'_{31} = \frac{d\psi_{31}}{dz}.$$

Из (303) и (302) получаем [Л. 180]:

$$\psi_{34} = \frac{s}{p} \frac{d^2\psi_{12}}{dz^2}. \quad (304)$$

Потоки в круговом цилиндре можно найти с помощью формул, полученных для излучающего диска [Л. 100]. В случае кругового цилиндра единичного

диаметра коэффициент связи ψ_{12} найдем по (300), полагая $r_1 = r_2 = 1/2$:

$$l_1 = \sqrt{1 + z^2};$$

$$l_2 = z.$$

Тогда

$$\psi_{12} = (\sqrt{1 + z^2} - z)^2. \quad (305)$$

В этом случае [Л. 180]

$$\psi_{31} = \frac{1 - \frac{z^2}{2}}{\sqrt{1 + z^2}} - z; \quad (306)$$

$$\psi_{34} = 1 - z \frac{\frac{3}{2} + z^2}{(1 + z^2)^{3/2}}. \quad (307)$$

Рассмотрим теперь две одинаковые, круглые диафрагмы 2 и 3, параллельные и коаксиальные излучающему диску 1, но расположенные от него на разных расстояниях (рис. 76), и соединяющую их цилиндрическую поверхность 4. Пусть через диафрагму 2, ближайшую к излучателю, проходит поток F_{12} , а через другую диафрагму — поток F_{13} . Если диаметр цилиндра больше диаметра излучателя, то на внутреннюю поверхность цилиндра непосредственно от излучателя падает поток, равный разности $F_{12} - F_{13}$.

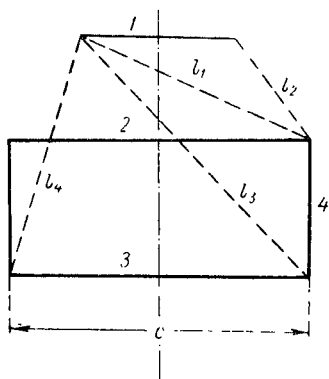


Рис. 76.

По принципу обратимости такой же поток будет падать от цилиндра, если он излучает так же, как рассматриваемый диск, на последний [Л. 100]. Отсюда, если выразить потоки F_{12} и F_{13} по формуле (299), получается выражение потока, падающего на круглую диафрагму от цилиндрического излучателя большего диаметра:

$$F_{41} = \frac{\pi}{4} R [(l_1 - l_2)^2 - (l_3 - l_4)^2]. \quad (308)$$

Теперь находим коэффициент связи цилиндрического излучателя 4 с круглой диафрагмой, расположенной на месте диска 1:

$$\psi_{41} = \frac{(l_1 - l_2)^2 - (l_3 - l_4)^2}{2ch}, \quad (309)$$

где c и h — диаметр и высота цилиндра.

§ 35. Замена излучающей поверхности точечным источником

Сила света элемента ds поверхности, излучающей по закону Ламберта с яркостью B ,

$$dI = B \cos \vartheta ds,$$

где ϑ — угол излучения. Следовательно, равнояркая поверхность s , рассматриваемая с расстояния, значительно превышающего ее размеры (§ 25), дает силу света

$$I = B \int_s \cos \vartheta ds, \quad (310)$$

где ϑ — угол между нормалью к ds и направлением определяемой силы света. Этот интеграл имеет смысл проекции поверхности s на плоскость, перпендикулярную направлению силы света I . Поэтому уравнение индикатрисы точечного источника, заменяющего равнояркую поверхность, может быть составлено из рассмотрения проекции излучающей поверхности: значение $f(\vartheta)$ пропорционально этой проекции на плоскость, перпендикулярную направлению, характеризующему углом ϑ . Этот способ удобно применять к излучающим поверхностям вращения [Л. 78, 138, 265], в частности к поверхности, заслоненной в некоторых направлениях другой, темной поверхностью [Л. 65], а также, когда излучающая поверхность состоит из нескольких простых (например, соединение диска и конуса и т. п.— [Л. 92]).

Иногда по виду индикатрисы можно заключить о том, соединение каких простых поверхностей может ее дать, и составить соответствующее уравнение, хотя в действительности источник соединением таких поверхностей и не является. В других случаях это

можно сделать анализируя кривую потока [Л. 92]. Н. Г. Болдырев дал общий способ для составления приближенного уравнения индикатрис точечного источника, заменяющего равнояркую поверхность, по таким же уравнениям для шара, диска и цилиндра [Л. 189].

Согласно § 28, равнояркий шар может быть заменен точечным источником при любом расстоянии от его поверхности до освещаемой, причем освещенности от точечного источника во всех случаях в точности равны освещенностям от шара. В других случаях замена поверхности точечным источником приводит к погрешности, зависящей от расстояния.

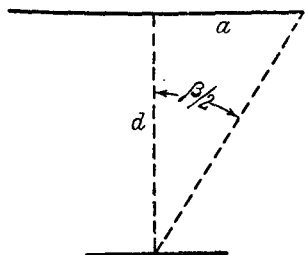


Рис. 77.

Выведенное выше выражение (292) позволяет выяснить погрешность, получаемую при замене излучающего диска точечным источником. Пусть диск радиуса a расположен на высоте d над параллельной ему плоскостью (рис. 77). Освещенность последней в точке

проекции центра диска может быть написана, по (291), следующим образом, если выразить $\sin \beta/2$ через $\operatorname{tg} \beta/2 = a/d$:

$$E = R \frac{a^2}{d^2} \frac{1}{1 + \frac{a^2}{d^2}}. \quad (311)$$

В случае замены диска точечным источником, помещенным в его центре, $a < d$; поэтому

$$E = R \frac{a^2}{d^2} \left[1 - \left(\frac{a}{d} \right)^2 + \left(\frac{a}{d} \right)^4 - \dots \right].$$

Если здесь отбросить все члены, кроме первого, то

$$E = R \frac{a^2}{d^2} = \pi B \frac{a^2}{d^2} = \frac{I_0}{d^2},$$

где I_0 — сила света точечного источника, заменяющего диск, в направлении нормали к последнему. При этом

будет сделана ошибка, меньшая $\left(\frac{a}{d}\right)^2$. Если, например,

$$\frac{a}{d} = 0,1,$$

то ошибка менее 1%.

Поместив тот же источник на высоте $h = \sqrt{a^2 + d^2}$, получим, как легко видеть из (311), точное значение освещенности.

Рассмотрим еще прямой круговой цилиндр высоты h и радиуса r , боковая поверхность которого излучает с яркостью B . Приняв за основное направление ось цилиндра и проектируя цилиндрическую поверхность на плоскость, перпендикулярную лучу, идущему под углом ϑ , легко найти, что площадь проекции равна $2\pi r h \sin \vartheta$; следовательно,

$$I = I_{\max} \sin \vartheta, \quad (312)$$

где угол ϑ отсчитывается от оси цилиндра, а I_{\max} — сила света при $\vartheta = \pi/2$:

$$I_{\max} = 2Brh.$$

Полный световой поток, даваемый цилиндрической поверхностью,

$$F = 2\pi r h R = 2\pi^2 r h B = \pi^2 I_{\max}.$$

Индикатрису такого точечного источника следует определить как

$$f(\vartheta) = \sin \vartheta; \quad (313)$$

тогда эквивалентный телесный угол [Л. 85]

$$\Omega = \pi^2. \quad (314)$$

Индикатриса точечного источника, заменяющего вогнутую поверхность, ограниченную плоским контуром, совпадает с индикатрисой площадки. Как показал Н. Г. Болдырев [Л. 232], точечный источник, заменяющий плоскую поверхность, излучающую по закону Ламберта, при освещении параллельной плоскости должен быть помещен в центре тяжести этой поверхности.

Замена прямоугольных равномерных излучателей точечными источниками практиковалась в расчетах естественного освещения [Л. 123].

Более общее решение задачи о замене равнояркой излучающей поверхности точечным источником можно получить методом конформных отображений, применимым к излучателям, создающим осесимметричные и плоские световые поля. Этот метод рассмотрен в § 37.

§ 36. Излучающие линии

Соотношения для расчета освещения от излучающих линий, имеющих индикатрису (74), легко получить из общих формул § 27. Те же соотношения можно вывести, рассматривая линию как излучающую поверхность, один из размеров которой стремится к нулю [Л. 66]. Первоначально линии, излучающие по закону Ламберта, рассматривали применительно к освещению ртутными лампами. В дальнейшем расчет действия таких линий получил применение в архитектурном освещении [Л. 210, 297] и для люминесцентного освещения.

Рассмотрим частные случаи расчета освещенности.

Если излучающей линией заменена весьма узкая лента или полоса, параллельная плоскости I (рис. 56), то

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \pi; \quad \vartheta = \beta_1; \quad f(\vartheta) = \cos \beta_1 = \frac{h_1}{r_0} \cos \gamma; \\ dE_1 &= \frac{Lh_1^2}{\pi r_0^3} \cos^2 \gamma \, d\gamma; \quad dE_3 = \frac{Lh_1}{\pi r_0^2} \sin \gamma \cos \gamma \, d\gamma; \end{aligned} \right\}$$

отсюда освещенности площадок I , II и III от всей линии, видимой из точки O под углом γ_0 ,

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{Lh_1^2}{\pi r_0^3} \varphi(\gamma_0); \quad E_2 = \frac{Lh_1 h_2}{\pi r_0^3} \varphi(\gamma_0); \\ E_3 &= \frac{Lh_1}{2\pi r_0^2} \sin^2 \gamma_0, \end{aligned} \right\} \quad (315)$$

где [Л. 79]

$$\varphi(\gamma_0) = \frac{1}{4} (2\gamma_0 + \sin 2\gamma_0).$$

Значения функции $\varphi(\gamma_0)$ приведены в табл. 10.

Таблица 10

К расчету освещенностей от равнояркой ленты

γ_0°	$\varphi(\gamma_0)$	γ_0°	$\varphi(\gamma_0)$
0	0,0000	50	0,6825
10	0,1728	60	0,7401
20	0,3352	70	0,7716
30	0,4783	80	0,7836
40	0,5953	90	0,7854

Коэффициент связи ψ равнояркой ленты с параллельной ей полосой (рис. 59) найдем по (230), вычислив функцию $F(\theta)$ по (227). Согласно (226), при излучении по закону Ламберта

$$f(v) = \cos \gamma \cos \theta.$$

Подставляя это в (227), получаем:

$$F(\theta) = \frac{\cos \theta}{2};$$

тогда

$$\psi = \frac{\sin \theta_2 - \sin \theta_1}{2}. \quad (316)$$

Если излучающей линией заменена круговая цилиндрическая поверхность весьма малого диаметра (трубка), то, по найденному в § 35, следует принять:

$$\Omega = \pi^2; \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \gamma;$$

тогда

$$\left. \begin{aligned} f(\theta) = \cos \gamma; \quad dE_1 = \frac{Lh_1}{\pi r_0^2} \cos^2 \gamma \quad \gamma \\ dE_s = \frac{L}{\pi^2 r_0} \sin \gamma \cos \gamma \, d\gamma; \end{aligned} \right\}$$

отсюда

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{Lh_1}{\pi^2 r_0^2} \varphi(\gamma_0); & E_2 &= \frac{Lh_2}{\pi^2 r_0^2} \varphi(\gamma_0); \\ E_3 &= \frac{L}{2\pi^2 r_0} \sin^2 \gamma_0. \end{aligned} \right\} \quad (317)$$

Ряд излучающих линий заменяется, как и при других законах излучения, излучающей поверхностью [Л. 157, 259]. Построены подробные графики для расчета потока от полосы на прямоугольник в важнейших случаях их расположения [Л. 288].

§ 37. Двухмерные задачи

В двухмерном поле равнояркого излучателя направление светового вектора легко определить подобно тому, как это было сделано в § 33. Если лучи, сходящиеся от излучателя в точке P , заполняют на плоскости, служащей для описания поля, угол F_1PF_2 (рис. 78), то вследствие симметрии, обусловленной одинаковой яркостью всех этих лучей, световой вектор в точке P должен быть направлен по биссектрисе угла F_1PF_2 .

Пусть F_1 и F_2 — фокусы семейства софокусных эллипсов. Каждый из этих эллипсов может быть следом некоторого эллипсоида вращения или некоторого эллиптического цилиндра на плоскости, определяющей световое поле. Если ось вращения эллипсоида лежит в этой плоскости, а ось цилиндра ей перпендикулярна, причем цилиндр имеет бесконечную высоту, то в рассматриваемой плоскости определяется поле такого вида излучателей, имеющих светность, постоянную по их поверхности. Если, кроме того, эти излучатели подчиняются закону Ламберта, то световой вектор, создаваемый в точке P любым из них, направлен по биссектрисе угла F_1PF_2 . Это следует из того, что биссектриса угла F_1PF_2 совпадает с биссектрисой угла M_1PM_2 между проведенными из точки P касательными к любому эллипсу семейства (рис. 78).

Таким образом, направление светового вектора в поле равноярких эллипсоидов вращения и эллиптических цилиндров бесконечной высоты весьма просто определяется построением биссектрисы угла между проходящими через фокусы прямыми, пересекающимися в той точке поля, где определяется вектор. Софокусные эллипсы вырождаются в отрезок прямой F_1F_2 . Если

эллипсоиды сплюснутые, то этот отрезок представляет собой диаметр излучающего диска, в который они вырождаются. Если же эллипсоиды вытянутые, то они вырождаются в излучающую линию-трубку, имеющую длину F_1F_2 . Эллиптические цилиндры вырождаются в излучающую полосу ширины F_1F_2 . Следовательно, направление светового вектора в точке P поля равноярких излучателей в виде диска, трубки и полосы определяется биссектрисой угла F_1PF_2 (рис. 78), если отрезок F_1F_2 равен соответственно диаметру диска, длине трубки или ширине полосы.

Во всех рассмотренных случаях световые линии образуют семейство софокусных гипербол с фокусами F_1 и F_2 : по основному свойству гиперболы касательная к ней в точке P делит угол F_1PF_2 пополам. Тогда линии уровня квазипотенциала должны быть конфокальными эллипсами с фокусами F_1 и F_2 . Такой вид световых полей

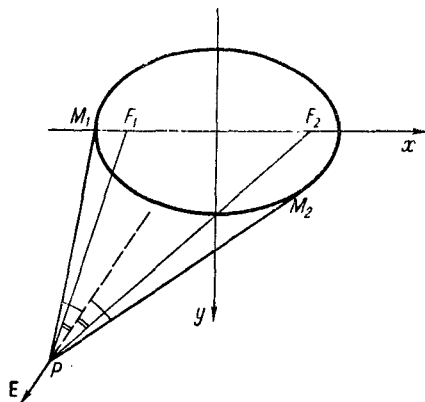


Рис. 78.

был найден для диска, трубки и полосы, излучающих по закону Ламберта [Л. 66, 97, 217], а впоследствии также для равноярких эллипсоидов вращения, трубок и эллиптических цилиндров [Л. 296].

Излучающие поверхности принадлежат в таких случаях, как это и должно быть согласно установленному в главе четвертой, семейству поверхностей уровня квазипотенциала.

Таким образом, линии уровня квазипотенциала на плоскости двумерного поля равноярких эллипсоидов вращения (в частности, дисков и трубок), а также равноярких эллиптических цилиндров (в частности, полос) имеют вид софокусных эллипсов. Поэтому для определения квазипотенциала и светового вектора может быть применен метод Муна и Спенсер (§ 28). Пользуясь этим методом, введем криволинейные

координаты ϵ, θ , в которых уравнение эллипса имеет вид:

$$\epsilon = \text{const},$$

а уравнение гиперболы:

$$\theta = \text{const}.$$

В табл. 11 приведены формулы перехода от координат ϵ, θ к декартовым координатам x, y , оси которых расположены, как показано на рис. 78. Расстояние между фокусами принято равным $2c$. Для тех же излучателей в таблицу помещены выражения $\nabla^2 W$, т. е. левая часть уравнения Лапласа (115), решения W последнего, содержащие постоянные A и B , выражения $|\nabla W|$, интегрирующего множителя μ , квазипотенциала $W(\epsilon; \epsilon_0)$ и модуля светового вектора $|\mathbf{E}|$ [Л. 295, 296]. Интегрирующий множитель и квазипотенциал, т. е. постоянные A и B , во всех трех случаях найдены из условий, что на излучающей поверхности, где $\epsilon = \epsilon_0, |\mathbf{E}| = R$ и $W=0$, а при $\epsilon \rightarrow \infty$ световой вектор $\mathbf{E} \rightarrow 0$.

Сравнение представленных в табл. 11 результатов исследования светового поля эллипсоидов с первым исследованием освещения от эллипсоида, которое на сто лет ранее произвел Бсер [Л. 25], наглядно показывает преимущество современных методов теоретической фотометрии и открываемые ими возможности.

Как видно из таблицы, интегрирующий множитель во всех трех случаях зависит только от координаты θ , вследствие чего он удовлетворяет условию (113), и соответствующий ему квазипотенциал определяется из уравнения Лапласа. Вообще же приведенные в таблице формы интегрирующих множителей не единственно возможные.

При $\epsilon_0 = 0$ сплюснутый эллипсоид вырождается в диск радиуса c , вытянутый — в отрезок прямой длиной $2c$, эллиптический цилиндр — в полосу шириной $2c$. Диск и полоса — плоские излучатели, для которых, согласно (191), интегрирующий множитель при соблюдении закона Ламберта

$$\mu = \frac{1}{\eta}, \quad (318)$$

где η — ордината рассматриваемой точки поля.

Нетрудно убедиться, что в координатах ϵ, θ эта форма интегрирующего множителя принимает вид:

Световое поле некоторых равновярких излучателей

Величина	Эллипсоиды вращения		Эллиптический цилиндр
	сплюснутый	вытянутый	
x	$c \operatorname{ch} \epsilon \sin \theta$	$c \operatorname{ch} \epsilon \cos \theta$	$c \operatorname{ch} \epsilon \cos \theta$
y	$c \operatorname{sh} \epsilon \cos \theta$	$c \operatorname{sh} \epsilon \sin \theta$	$c \operatorname{sh} \epsilon \sin \theta$
$\nabla^2 W$	$\frac{d^2 W}{d\epsilon^2} \operatorname{th} \epsilon \frac{dW}{d\epsilon}$	$\frac{d^2 W}{d\epsilon^2} + \operatorname{cth} \epsilon \frac{dW}{d\epsilon}$	$\frac{d^2 W}{d\epsilon^2}$
W	$A + B \operatorname{arctg} \operatorname{sh} \epsilon$	$A + B \ln \operatorname{th} \frac{\epsilon}{2}$	$A - B\epsilon$
$ \Delta W $	$\frac{1}{c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \epsilon - \sin^2 \theta}} \cdot \frac{dW}{d\epsilon}$	$\frac{1}{c \sqrt{\operatorname{sh}^2 \epsilon \cdot \sin^2 \theta}} \cdot \frac{dW}{d\epsilon}$	$\frac{1}{c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \epsilon - \cos^2 \theta}} \cdot \frac{dW}{d\epsilon}$
μ	$\frac{1}{c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \epsilon_0 - \sin^2 \theta}}$	$\frac{1}{c \sqrt{\operatorname{sh}^2 \epsilon_0 \cdot \sin^2 \theta}}$	$\frac{1}{c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \epsilon_0 - \cos^2 \theta}}$
$W(\epsilon; \epsilon_0)$	$R \operatorname{ch} \epsilon_0 (\operatorname{arctg} \operatorname{sh} \epsilon_0 - \operatorname{arctg} \operatorname{sh} \epsilon)$	$R \operatorname{sh} \epsilon_0 \ln \frac{\operatorname{th} \frac{\epsilon_0}{2}}{\operatorname{th} \frac{\epsilon}{2}}$	$R(\epsilon_0 - \epsilon)$
$ E $	$R \frac{\operatorname{ch} \epsilon_0}{\operatorname{ch} \epsilon} \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 \epsilon_0 - \sin^2 \theta}{\operatorname{ch}^2 \epsilon - \sin^2 \theta}}$	$R \frac{\operatorname{sh} \epsilon_0}{\operatorname{sh} \epsilon} \sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2 \epsilon_0 \cdot \sin^2 \theta}{\operatorname{sh}^2 \epsilon \cdot \sin^2 \theta}}$	$R \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 \epsilon_0 - \cos^2 \theta}{\operatorname{ch}^2 \epsilon - \cos^2 \theta}}$

для диска

$$\mu = \frac{\operatorname{csch} \varepsilon}{c \cos \theta};$$

для полосы

$$\mu = \frac{\operatorname{csch} \varepsilon}{c \sin \theta}.$$

Эти интегрирующие множители не удовлетворяют условию (113); соответственные им квазипотенциалы не могут быть получены из уравнения Лапласа, но могут быть найдены другими способами [Л. 403].

В точке поля диска, имеющей декартовы координаты ξ, η , по Гершуну [Л. 124], квазипотенциал, соответствующий интегрирующему множителю (318),

$$W(\xi, \eta; c) = \frac{R}{2} \ln \frac{\eta^2 - \xi^2 + c^2 + \sqrt{(\eta^2 + \xi^2 + c^2)^2 - 4c^2\xi^2}}{2\eta^2}. \quad (319)$$

В точке $(0, \eta, 0)$ поля полосы (рис. 61) квазипотенциал, соответствующий тому же интегрирующему множителю, получим из (245), полагая $m = 1$. Результат приведен в табл. 8.

Из (319) и табл. 8 легко получить выражения светового вектора в полях диска и полосы. Для диска отсюда следует формула (291).

Световой вектор в поле равнояркой полосы легко найти также, пользуясь законом проекции телесного угла. Вычислим освещенность от полосы F_1F_2 на плоскости s_0 , перпендикулярной вектору в точке P (рис. 79). На рисунке показана дуга, представляющая сечение сферы единичного радиуса, построенной для измерения телесных углов, плоскостью чертежа. Телесный угол, под которым видна полоса из точки P , измеряется долей сферы, заключенной между плоскостями F_1P и F_2P , проходящими через центр шара, причем линия их пересечения лежит в плоскости s_0 . Над последней, в плоскостях F_1P и F_2P , образуется по половине большого круга сферы, составляющего с s_0 угол $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$.

Проекция телесного угла равна сумме проекций этих полукругов, т. е. $\pi \sin \alpha/2$; следовательно,

$$|\mathbf{E}| = R \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (320)$$

Это выражение можно получить и из формулы Винера.

Зная световой вектор, нетрудно вычислить освещенность любой плоскости, не пересекающей излучающей полосы. Если нормаль к такой плоскости составляет угол ϑ с биссектрисой угла α (рис. 79), то ее освещенность

$$E = R \sin \frac{\alpha}{2} \cos \vartheta. \quad (321)$$

Выражая угол α через декартовы координаты рассматриваемой точки поля и переходя от них к координатам ε , θ , получим результат, который следует из последнего столбца табл. II (для эллиптического цилиндра) при $\varepsilon_0=0$.

Из (321) нетрудно получить другое выражение освещенности:

$$E = \frac{R}{2} (\sin \vartheta_2 - \sin \vartheta_1), \quad (322)$$

где ϑ_1 и ϑ_2 — углы, составляемые нормалью к освещаемой плоскости с линиями F_1P и F_2P .

На последней формуле основано графическое построение для определения освещенности в точке P плоскости s от цилиндрической поверхности $F_1'F_2'$ единичной светности и бесконечного протяжения, показанное на рис. 79 [Л. 262]. Строим полуокружность единичного диаметра, имеющую центр в точке P , и проектируем на s ее дугу, вырезаемую лучами F_1P и F_2P . Освещенность равна длине этой проекции.

Выражение (322) можно получить и из (316), пользуясь принципом обратимости. Действительно,

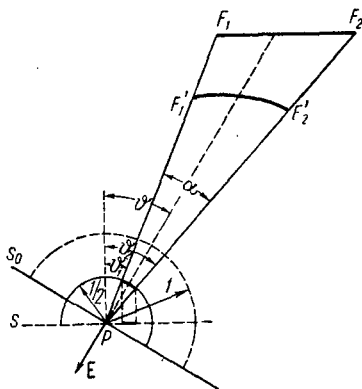


Рис. 79.

коэффициент связи равнояркой ленты с параллельной ей бесконечной полосой должен быть равен коэффициенту освещенности любого элемента этой ленты, когда та же полоса излучает по закону Ламберта.

Во всех случаях, в которых световое поле равнояркого излучателя описывается ортогональной сеткой эллипсов и гипербол, эта сетка может быть преобразована в сетку окружностей и полупрямых посредством конформного отображения. На применение и полезность этого метода в теоретической фотометрии впервые указал С. П. Детков [Л. 350].

Рассмотрим сетку эллипсов и гипербол на плоскости декартовых координат x, y (рис. 78) и ее конформное отображение на плоскость полярных координат r, β . Вводя функции

$$u = x + iy;$$

$$v = r(\cos \beta + i \sin \beta),$$

свяжем их отображающей функцией Жуковского

$$u = \frac{1}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right),$$

обеспечивающей, как известно, требуемое преобразование поля. Тогда

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \beta; \\ y &= \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (323)$$

Окружность на плоскости u имеет уравнение

$$r = \text{const}, \quad (324)$$

а полупрямая

$$\beta = \text{const}. \quad (325)$$

При условии (324) из уравнений (323) получается уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

с полуосями

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right); \\ b &= \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right); \end{aligned} \right\} \quad (326)$$

При условии (325) из тех же уравнений получаем уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{\cos^2 \beta} - \frac{y^2}{\sin^2 \beta} = 1, \quad (327)$$

имеющей действительную и мнимую полуоси, равные $\cos^2 \beta$ и $\sin^2 \beta$.

Как видно из (326), при $r=1$ полуоси эллипса имеют значения $a=1$ и $b=0$. Следовательно, принимая за единицу длины на плоскости u половину расстояния между фокусами F_1 и F_2 , мы получим отображение отрезка F_1F_2 в окружность единичного радиуса на плоскости v . Отрезок F_1F_2 равен диаметру диска или длине трубки, в которые, соответственно, вырождаются софокусные сплюснутые и вытянутые эллипсоиды вращения, или ширине полосы, в которую вырождаются софокусные эллиптические цилиндры. При таком вырождении излучающих поверхностей диск и полоса излучают в оба полупространства, отделяемые их плоскостями, т. е. во все пространство, как и линия-трубка. Следовательно, все световое поле эллипсоидов вращения и эллиптических цилиндров, описываемое на плоскости u , конформно отображается на внешность окружности $r=1$ на плоскости v . Эта окружность является границей светового поля на плоскости v ; на заключенной внутри нее части плоскости v световое поле не существует.

Шар или круговой цилиндр, в сечении которых плоскостью v получается окружность $r=1$, отнюдь не является, однако, отображением излучающих эллипсоидов вращения или эллиптических цилиндров. Поскольку световые линии на плоскости v образуют пучок полупрямых, излучающая поверхность отображается в некоторый точечный источник в случае эллипсоидов вращения и в некоторую излучающую прямую в случае эллиптических цилиндров.

Конформное отображение позволяет, таким образом, в рассмотренных случаях заменить равнояркую излучающую поверхность точечным источником (§ 35) во всем пространстве светового поля, т. е. не только на больших, но и на малых расстояниях от излучателя. Вследствие изменения метрики поля при таком

преобразовании, оно дает возможность непосредственно определять лишь световые потоки, которые не изменяются в конформно отображаемых световых трубках, или коэффициенты связи.

Рассмотрим коэффициент связи ψ диска 1 единичного радиуса с коаксиальным диском 2 радиуса ρ , расположенным на расстоянии η (рис. 80). По (199), ψ есть отношение площади s_0 , вырезанной из диска 1 гиперболической световой трубкой, охватывающей диск 2, к площади s_1 диска 1. В данном случае

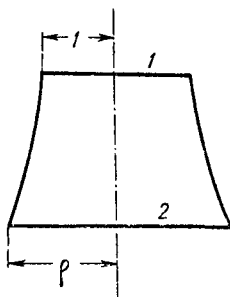


Рис. 80.

$$s_0 = \pi a^2,$$

где a — действительная полуось гиперболы, проходящей через край круга 2, а

$$s_1 = \pi.$$

Следовательно, искомый коэффициент связи

$$\psi = a^2. \quad (328)$$

По основному свойству гиперболы

$$a = \frac{l_1 - l_2}{2},$$

где l_1 и l_2 — расстояния какой-либо ее точки от фокусов.

Подставляя последнее выражение в (328), легко получить формулу (300).

Другое выражение ψ найдем с помощью конформного отображения, полагая

$$a^2 = \cos^2 \beta \quad (329)$$

и определяя эту величину из уравнения (327) при $x = \rho$, $y = \eta$. Тогда, замечая, что на плоскости v

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \vartheta,$$

где ϑ — аргумент индикатрисы точечного источника, заменяющего излучающий диск, имеем:

$$\psi = \sin^2 \vartheta.$$

Такое же выражение имеет коэффициент связи точечного источника, индикатриса которого $f(\vartheta) = \cos \vartheta$, т. е. такого, каким обычно заменяется излучающий диск (§ 35), с диском, коаксиальным фотометрической оси этого источника и имеющим радиус, видимый из источника под углом ϑ .

Найдем еще коэффициент связи трубки, в которую вырождается вытянутый эллипсоид вращения, с коаксиальным ей диском. Если и в этом случае обозначим через a действительную полуось гиперболической световой линии, проходящей через край освещаемого круга (рис. 81), то искомый коэффициент связи, определяемый по (199),

$$\psi = \frac{1-a}{2},$$

так как теперь за единицу длины следует принять половину длины трубки. Отсюда, согласно (329) и принимая во внимание, что в данном случае на плоскости v

$$\beta = \vartheta,$$

получаем:

$$\psi = \frac{1 - \cos \vartheta}{2}.$$

Такое же выражение, согласно (137), имеет коэффициент связи равномерного точечного источника с рассматриваемым диском. Следовательно, равнояркая трубка при конформном отображении заменяется равномерным точечным источником. Если диск имеет радиус ρ и находится на расстоянии ξ от середины трубки (рис. 81), то $\cos \vartheta = \cos \beta$ можно найти из (327), полагая $x = \xi$, $y = \rho$.

Рассмотрим, наконец, излучающую полосу F_1F_2 , в которую вырождаются эллиптические цилиндры, и возьмем поверхность, представленную на рис. 82 ее следом s , проходящим через точки P_1 и P_2 ; пусть это будет бесконечный цилиндр, к которому плоскость чертежа нормальна. Рассмотрим участок P_1P_2 этой поверхности.

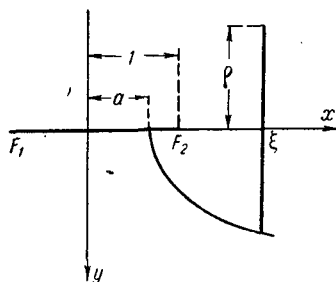


Рис. 81.

Через точки P_1 и P_2 проходят световые линии, выходящие из точек O_1 и O_2 излучающей полосы, находящихся на расстояниях a_1 и a_2 от середины O полосы.

По (199), обозначая ширину полосы через x , найдем коэффициент связи ψ полосы с частью P_1P_2 поверхности s :

$$\psi = \frac{a_2 - a_1}{x}. \quad (330)$$

Здесь a_1 и a_2 — действительные полуоси гиперболических световых линий. При конформном отображении

поля полосы эти величины можно найти по координатам точек P_1 и P_2 из уравнения (327), так как

$$a_1 = \cos \beta_1; \quad a_2 = \cos \beta_2.$$

Замечая, что применительно к излучающей линии, являющейся отображением полосы, $\gamma = \theta$ (рис. 58), и что за единицу длины должна быть принята половина ширины полосы, получаем коэффициент связи (316). Это показывает, что

при конформном отображении светового поля равнояркой полосы в поле излучающей линии последняя является лентой, излучающей по закону Ламберта.

Обозначим далее через l_1, l'_1, l_2 и l'_2 расстояния от точек P_1 и P_2 до точек F_1 и F_2 . По основному свойству гиперболы,

$$2a_1 = l_1 - l'_1; \quad 2a_2 = l_2 - l'_2.$$

Тогда из (330)

$$\psi = \frac{(l_1 - l'_1) - (l_2 - l'_2)}{2x}. \quad (331)$$

Эту формулу применим к случаю, когда P_1P_2 равно ширине x полосы, а поверхность s — параллельная полосе плоскость на единичном расстоянии от нее. Тогда

$$l'_1 = l_2 = 1; \quad l'_2 = l_1 = \sqrt{1 + x^2};$$

$$\psi = \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}. \quad (332)$$

Формулу (332) можно получить также, полагая в (284) $y \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь равнояркие цилиндрические поверхности, получаемые при движении бесконечной образующей по направляющей произвольного вида. На рис. 83 изображены следы таких поверхностей на плоскости, перпендикулярной их образующим. В этой плоскости достаточно, очевидно, изучить световое поле. По правилу взаимозаменяемости, условия освещения в любой точке поля выпуклой поверхности 1 будут такими

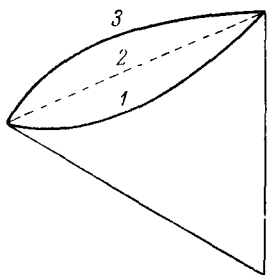


Рис. 83.

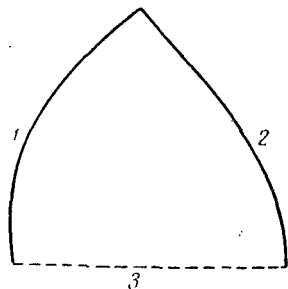


Рис. 84.

же, как от показанной на рисунке плоской излучающей полосы 2, соединяющей края цилиндрической поверхности, видимой из этой точки. Для вогнутой поверхности 3 то же будет на достаточных от нее расстояниях. Таким образом, изучение поля выпуклой цилиндрической поверхности, а во многих случаях и вогнутой, сводится к изучению поля бесконечной плоской полосы.

Найдем коэффициенты связи между двумя вогнутыми цилиндрическими поверхностями 1 и 2 бесконечной высоты, соприкасающимися с одной стороны. На рис. 84 показано сечение этих поверхностей плоскостью, перпендикулярной их образующим, предполагаемым параллельными. Пусть дуги, представляющие следы цилиндров 1 и 2 на плоскости чертежа, имеют длины l_1 и l_2 . Построим вспомогательную замыкающую плоскость 3, проходящую через не соприкасающиеся края цилиндров, и обозначим через l_3 длину ее следа. На эту плоскость попадает, очевидно, поток каждой из поверхностей 1 и 2, минуя цилиндры.

Применим термодинамический метод (§ 11). Условие замкнутости дает три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{11} + \psi_{12} + \psi_{13} &= 1; \\ \psi_{21} + \psi_{22} + \psi_{23} &= 1; \\ \psi_{31} + \psi_{32} &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Формула (83) позволяет написать еще три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} l_1 \psi_{12} &= l_2 \psi_{21}; \\ l_1 \psi_{13} &= l_3 \psi_{31}; \\ l_2 \psi_{23} &= l_3 \psi_{32}. \end{aligned} \right\}$$

Коэффициенты самосвязи определяются по (276):

$$\left. \begin{aligned} \psi_{11} &= 1 - \frac{l'_1}{l_1}; \\ \psi_{22} &= 1 - \frac{l'_2}{l_2}, \end{aligned} \right\} \quad (333)$$

где l'_1 и l'_2 — хорды дуг l_1 и l_2 . Поэтому из написанных шести уравнений легко найти остальные шесть коэффициентов связи, имеющих симметричные выражения вида:

$$\psi = \frac{l_n(1 - \psi_n) + l_o(1 - \psi_o) - l_3}{2l_n}, \quad (334)$$

где индексы «и» и «о» относятся к излучающему и освещаемому цилиндрам, а индекс «з» — к замыкающей плоскости. Подставляя сюда (333), находим [Л. 344]:

$$\psi = \frac{l'_n + l'_o - l_3}{2l_n}. \quad (335)$$

Это выражение показывает, что для вычисления коэффициента связи двух поверхностей рассматриваемой фигуры, из которых одна излучающая, а другая освещаемая, следует, если поверхности вогнутые, из суммы хорд излучающей и освещаемой поверхностей вычесть ширину замыкающей их плоскости, и результат разделить на удвоенную дугу излучающей поверхности.

Если цилиндры 1 и 2 вырождаются в плоскости или становятся выпуклыми, то коэффициенты самосвязи $\psi_n = \psi_o = 0$ и хорды заменяются дугами.¹

¹ Выражение (335) следует также из аналогичной формулы, полученной Г. Л. Поляком [Л. 250], в которой на месте хорд стоят поверхности соответствующих цилиндров.

В случае наличия цилиндра ε , экранирующего цилиндры 1 и 2 (рис. 85), l_3 будет суммой длин касательных к экранирующей поверхности, проведенных через края излучающего и освещаемого цилиндров, сложенной с длиной дуги экрана между точками касания.

Замкнутую фигуру, образованную любым числом бесконечных цилиндрических поверхностей, можно разбить на несколько других, каждая из которых состоит лишь из трех поверхностей, построив вспомогательные плоскости, проходящие через линии сопряжения цилиндров. Тогда легко найти коэффициенты связи всех поверхностей, составляющих фигуру. Это

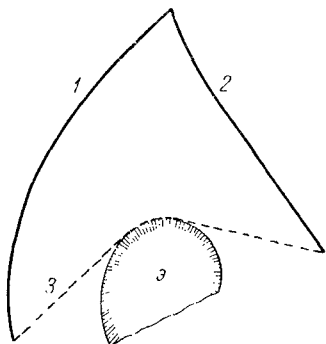


Рис. 85.

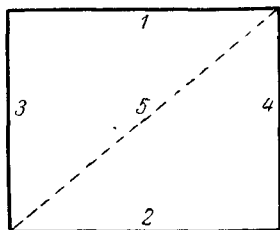


Рис. 86.

относится и к многогранным призмам бесконечной высоты.

Рассмотрим, например, прямоугольную четырехгранную призму бесконечной высоты, у которой ширина граней 1 и 2 равна x , если ширина граней 3 и 4 принята за единицу (рис. 86). Коэффициент связи

$$\psi_{12} = 1 - 2\psi_{13}.$$

Построим вспомогательную диагональную плоскость 5 . Применяя (335) к призме с гранями 1 , 3 и 5 , находим:

$$\psi_{13} = \frac{x \cdot 1 - \sqrt{1 - x^2}}{2x}.$$

Подставляя это выражение в предыдущее, получаем (332).

Пользуясь тем же методом, обобщим выражение (331) на случай двух бесконечных выпуклых цилиндрических поверхностей с параллельными образующими, каждая из которых освещает другую неполностью. На рис. 87 показано сечение таких поверхностей A и B плоскостью, перпендикулярной их образующим. Прямые a_1b_1 и a_2b_2 — следы вспомогательных внутренних касательных плоскостей, а прямые a_3b_3 и a_4b_4 — следы вспомогательных наружных касательных плоскостей

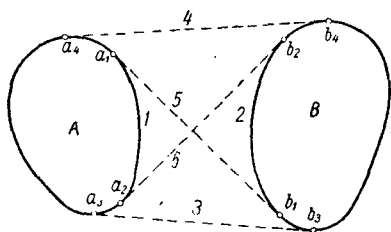


Рис. 87.

к поверхностям A и B . Найдем коэффициент связи поверхностей A и B . Рассмотрим поверхности 1 — цилиндр $a_4a_1a_2a_3$; 2 — цилиндр $b_4b_2b_1b_3$; 3 — плоскость a_3b_3 ; 4 — плоскость a_4b_4 ; 5 — цилиндр $a_4a_1b_1b_3$ и 6 — цилиндр $a_3a_2b_2b_4$, обозначив l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 и l_6 длины показанных на рисунке следов

всех шести поверхностей. Искомый коэффициент связи

$$\psi_{12} = 1 - \psi_{13} - \psi_{14}.$$

Но, по приведенному выше правилу для случая экранирования,

$$\left. \begin{aligned} \psi_{13} &= \frac{l_1 + l_3 - l_5}{2l_1}; \\ \psi_{14} &= \frac{l_1 + l_4 - l_6}{2l_1}; \end{aligned} \right\} \quad (336)$$

следовательно,

$$\psi_{12} = \frac{l_5 + l_6 - l_3 - l_4}{2l_1}, \quad (337)$$

т. е. для получения коэффициента связи в рассматриваемом случае надо вычесть сумму дуг, построенных с помощью внешних касательных, из суммы дуг, построенных с помощью внутренних касательных, и разделить результат на удвоенную дугу излучающей поверхности. Формула (331) — один из частных случаев этого соотношения, полученных ранее [Л. 208, 248].

Таким же способом нетрудно получить выражение коэффициентов связи полос 4 и 3. Например, коэффициент связи

$$\psi_{43} = 1 - \psi_{41} - \psi_{42}.$$

Принимая во внимание, что

$$\psi_{41} = \psi_{14} \frac{l_1}{l_4},$$

из (336) получим:

$$\psi_{41} = \frac{l_1 + l_4 - l_6}{2l_4}.$$

Аналогично этому

$$\psi_{42} = \frac{l_2 + l_4 - l_5}{2l_4};$$

тогда

$$\psi_{43} = \frac{l_5 + l_6 - l_1 - l_2}{2l_4}. \quad (338)$$

Если ввести дуги $l_7 = \overline{a_3 a_4}$ и $l_8 = \overline{b_3 b_4}$, то $l' = l_5 + l_6 + l_7 + l_8$ и $l'' = l_3 + l_4 + l_7 + l_8$ будут длинами эластичных нитей, надетых на цилиндры 1 и 2 вперекрест и снаружи, через которые, как показал Г. Л. Поляк [Л. 250], можно выразить коэффициент связи ψ_{12} . Действительно, из (337) получаем:

$$\psi_{12} = \frac{l' - l''}{2l_1}. \quad (339)$$

Замечая, что $l_1 + l_7$ и $l_2 + l_8$ — периметры l_A и l_B цилиндров A и B, из (338) получим:

$$\psi_{43} = \frac{l' - l_A - l_B}{2l_4} \quad (340)$$

Рассматривая коэффициент связи как вероятность облучения освещаемой поверхности излучающей (§ 31), формулы (339) и (340) можно получить из теорем Крофтона о прямых, пересекающих два овала и проходящих между ними [Л. 35]. Этим методом могут быть найдены коэффициенты связи всякой равнояркой поверхности, создающей двухмерное, т. е. плоское или осесимметричное, световое поле.

МНОГОКРАТНОЕ ОТРАЖЕНИЕ

§ 38. Интегральные уравнения освещенности и светности

Когда отражающие поверхности так расположены или имеют такую форму, что могут освещать друг друга, или же каждая поверхность может освещать сама себя, происходит многократное отражение света. В результате

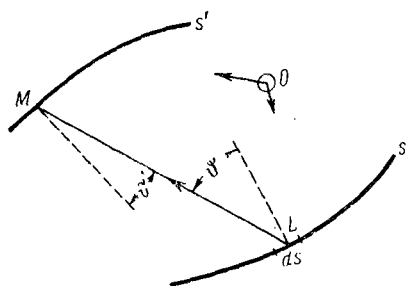


Рис. 88.

в каждой точке каждой поверхности устанавливается некоторая освещенность E , равная сумме освещенностей E_0 , получаемой непосредственно от источников, и E' , производимой отражением.

Рассмотрим две поверхности s и s' , между которыми происходит многократное отражение, и освещаю-

щий их источник O (рис. 88). Пусть в точке L элемент ds поверхности s имеет полную установившуюся освещенность $E(L)$; $\rho(L)$ — коэффициент отражения в этом месте для того светового потока (по спектру и поляризации), который падает на ds после всех отражений. Светность элемента ds равна ρE , и он действует как источник, дающий световой поток $\rho E ds$. Предположим, что распределение этого потока в пространстве характеризуется некоторой индикатрисой $f(\alpha, \vartheta)$: элемент ds , отражая свет, может действовать, как несимметричный источник. Тогда яркость элемента ds в направлении к некоторой точке M на поверхности s'

$$B = \frac{\rho E f(\alpha, \vartheta)}{\Omega \cos \vartheta},$$

где Ω — эквивалентный телесный угол, соответствующий индикатрисе элемента ds ;

ϑ — угол излучения.

Освещенность поверхности s' в точке M от элемента ds

$$dE' = B \cos \vartheta' d\omega,$$

где ϑ' — угол падения;

$d\omega$ — телесный угол, под которым из точки M виден элемент ds .

Освещенность от всей поверхности s

$$E' = \int_s dE'.$$

Обозначая освещенность, производимую в той же точке источником O , через $E_0(M)$, напомним полную освещенность в точке M как

$$E(M) = E_0(M) + \int \rho(L) E(L) \frac{f(x, \vartheta)}{\Omega} \cdot \frac{\cos \vartheta'}{\cos \vartheta} d\omega. \quad (341)$$

В общем случае $E(M)$ — одно из значений освещенности $E(L)$, так как M может быть любой точкой любой поверхности из участвующих в отражении. Таким образом, расчет освещенности при наличии многократного отражения требует решения интегрального уравнения [Л. 116].

В некоторых случаях легко найти точное решение уравнения (341). Рассмотрим простейший из таких случаев — сферу с одинаковым по всей ее внутренней поверхности коэффициентом отражения, в центре которой находится равномерный точечный источник.

Вследствие симметрии индикатриса, характеризующая распределение света, отраженного элементом сферы, одинакова по всей отражающей поверхности и не зависит от угла α . По той же причине освещенность E_0 также должна быть одинаковой во всех точках сферы, как и освещенность E . Кроме того, для сферы $\vartheta' = \vartheta$. Поэтому интегральное уравнение (341) приобретает вид:

$$E = E_0 + \rho \frac{E}{\Omega} \int f(\vartheta) d\omega.$$

Интегрирование здесь должно быть выполнено в пределах телесного угла 2π , из которого поступают

отраженные лучи в каждую точку сферы. Тогда, в силу (53), из последнего уравнения находим, что [Л. 344]

$$E = \frac{E_0}{1-\rho}. \quad (342)$$

Заметим, что этот результат получен для произвольной индикатрисы отражающего элемента сферы. Из теории светомерного шара он известен для поверхности, отражающей по закону Ламберта. В последнем случае теория интегральных уравнений позволяет произвести точное и подробное исследование распределения света в шаре с учетом отверстий в нем и т. п. [Л. 301].

Для поверхностей, отражающих по закону Ламберта, решение интегрального уравнения освещенностей при заданном неравномерном освещении источником света впервые получил В. В. Соболев, рассматривавший равномерный точечный источник между двумя бесконечными параллельными плоскостями [Л. 263]. Подобная задача была затем решена для случаев освещения системами точечных и линейных источников, а также при заданном периодическом распределении освещенности обеих плоскостей [Л. 277].

Когда все поверхности отражают по закону Ламберта, из (341) следует [Л. 232]:

$$E(M) = E_0(M) + \frac{1}{\pi} \int \rho(L) E(L) \cos \vartheta' d\omega. \quad (343)$$

Интеграл, стоящий здесь в правой части, легко написать по закону проекции телесного угла (§ 31). Он может быть выражен также через коэффициент освещенности $d\epsilon(M)$ точки M от элемента поверхности s (рис. 88):

$$E(M) = E_0(M) + \int \rho(L) E(L) \frac{d\epsilon(M)}{ds(L)} ds(L), \quad (344)$$

т. е. освещенность определяется интегральным уравнением Фредгольма.

В случаях, когда геометрия отражающих поверхностей такова, что положение каждой из точек M и L определяется лишь одной координатой, обозначаемой соответственно m и l ,

$$ds(L) = F(l) dl;$$

$$E(m) = E_0(m) + \int K_E(m, l) E(l) dl, \quad (345)$$

где ядро

$$K_E(m, l) = \rho(l) \frac{d\varepsilon(m, l)}{dl}.$$

Ядро интегрального уравнения (345) имеет смысл отношения освещенности, которую поверхность, проходящая через точку с координатой m , получает в этой точке от элемента ds , проходящего через точку с координатой l , к освещенности элемента ds и к образующему его приращению координаты l .

Умножив обе части (345) на коэффициент отражения $\rho(m)$ в точке M , получим интегральное уравнение светности [Л. 247]:

$$R(m) = R_0(m) + \int K_R(m, l) R(l) dl, \quad (346)$$

где

$$K_R(m, l) = \rho(m) \frac{d\varepsilon(m, l)}{dl};$$

это — ядро, определение которого можно сформулировать так же, как и для ядра K_E , с заменой освещенностей светностями.

Решение интегрального уравнения светности получено для ряда частных случаев, в том числе для сферы и полусферы [Л. 128], в предположении, что коэффициент отражения постоянен в пределах поверхности, от которой определяется коэффициент освещенности.

Известны точные решения для кругового цилиндра бесконечной длины [Л. 247], в частности с прорезью, параллельной образующим [Л. 243]. В случаях полубесконечного цилиндра, конечного цилиндра и конечного цилиндра, закрытого диском [Л. 118] и двумя дисками [Л. 180], получены приближенные решения, основанные на аппроксимации ядра интегрального уравнения одним, двумя и тремя [Л. 187, 199] экспоненциальными членами. Увеличение числа экспоненциальных слагаемых, аппроксимирующих ядро, делает решение более точным, но и более сложным.

Мун и Спенсер рекомендуют [Л. 315] одночленную аппроксимацию. Для цилиндра [Л. 252] $F(l) = 1$, и при $\rho = \text{const}$

$$K(m, l) \approx \frac{\alpha}{4} e^{-\alpha(m-l)}, \quad (347)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{qh},$$

если q вычислено по (210).

Решение, полученное для цилиндров (в частном случае прямоугольного сечения [Л. 253, 254], основано на допущении, что начальная (без отражений) светность (или освещенность) постоянна в пределах каждой из рассматриваемых поверхностей [Л. 230].¹ Тот же метод применен к расчету многократного отражения между частями замкнутой фигуры [Л. 281, 287]. В большинстве практически интересных случаев решение получается ценой двух допущений: первое — экспоненциальная аппроксимация ядра, второе — равномерность начальной освещенности. Эти допущения [Л. 255] всегда вносят некоторую погрешность. Для получения более точных решений уравнения (346) предложен метод электро моделирования [Л. 302, 304, 322, 324].

Когда отражающие поверхности являются вместе с тем излучающими, как это имеет место в теплотехнических задачах, но можно пренебречь влиянием освещения на собственное излучение, интегральные уравнения, аналогичные составленным выше, содержат член, характеризующий собственное излучение [341].

§ 39. Расчет световых потоков

Введем коэффициент связи φ_1 элемента ds поверхности s с поверхностью s_1 и обозначим через F_{01} световой поток, падающий на поверхность s_1 непосредственно от источника O (рис. 88). Тогда световой поток, падающий на поверхность s_1 в результате многократных отражений,

$$F_1 = F_{01} \cdot \int \varphi_1 \rho E ds, \quad (348)$$

где ρ и E — коэффициент отражения и полученная после всех отражений освещенность элемента ds . Интегрирование распространяется здесь по всем поверхностям, участвующим в отражении света. Если эти поверхности

¹ Особо исследован также незамкнутый круговой цилиндр [Л. 345].

можно разделить на части, в пределах каждой из которых ρ и E постоянны, то для каждой такой части s_i , по (69),

$$\int_{s_i} \varphi_{i1} \rho_i E_i ds_i = \rho_i E_i \int_{s_i} \varphi_{i1} ds_i = \psi_{i1} \rho_i E_i s_i = \psi_{i1} \rho_i F_i,$$

где F_i — световой поток, падающий на поверхность s_i после всех отражений, а ψ_{i1} — коэффициент связи этой поверхности с поверхностью s_1 при окончательном распределении потоков, предполагаемом равномерным в пределах каждой поверхности. Тогда интегральное уравнение (348) принимает вид:

$$F_1 = F_{01} + \sum_{i=1}^n \psi_{i1} \rho_i F_i, \quad (349)$$

где n — число частей, на которые может быть разбита совокупность всех отражающих поверхностей, удовлетворяющих условиям постоянства ρ и E .

Заметим, что вывод уравнения (349) не требует предположения о постоянстве начальной освещенности E_0 по каждой из n поверхностей, которое обычно оказывается необходимым при решении уравнения (345), но в большинстве случаев является весьма грубым допущением.

Можно сказать, что уравнение (349) получено без всяких допущений, потому что введенные при этом условия постоянства ρ и E лишь определяют те n поверхностей, к которым оно относится [Л. 195]. Поэтому уравнение (349) нельзя получить из интегрального уравнения освещенностей. В самом деле, применим уравнение (344) к системе n поверхностей, характеризуемых постоянными в пределах каждой поверхности ρ и E . Для поверхности 1 оно принимает вид:

$$E_1 = E_0(M) + \sum_{i=1}^n \rho_i E_i \varepsilon_i(M),$$

где $\varepsilon_i(M)$ — коэффициент освещенности от i -ой поверхности в точке M поверхности 1.

Если умножить обе части последнего равенства на s_1 , то в левой части будет $E_1 s_1 = F_1$, но правая часть будет идентична правой части (349) лишь при дополнительных условиях постоянства E_0 и, согласно (67), постоянства ε по поверхности 1. В большинстве случаев эти условия не соблюдаются, и принятие их означает

допущения, вводящие погрешность в расчет. Такие допущения излишни, если пользоваться уравнением (349).

В (349) погрешность вызывается только тем, что условие постоянства результирующей освещенности по каждой из n поверхностей может выполняться лишь приближенно. Здесь нет ошибок, возникающих при приближенном решении интегрального уравнения освещенностей (§ 38). Задача сводится к решению системы n линейных уравнений относительно n неизвестных потоков F_i , если все остальные величины заданы. Найдя эти потоки, нетрудно вычислить среднюю светность каждой поверхности. Можно решать и обратную задачу: задаваясь светностями R_i , а следовательно, и потоками $F_i = \frac{R_i s_i}{\rho_i}$, определить потоки F_{0i} , которые должны падать на рассматриваемые поверхности непосредственно от источников. Наконец, можно решать и такие задачи, в которых для некоторых поверхностей будут заданы потоки F_{0i} , а для других — требуемые светности или освещенности [Л. 306].

Число частей, на которые необходимо разбить совокупность отражающих поверхностей, тем больше, чем менее равномерно они освещены, как, например, в случае естественного освещения¹ от боковых окон.

В применении к тем задачам теплотехники, в которых необходим учет собственного излучения отражающих поверхностей, зависящего от их температуры, а следовательно, от падающих на них лучистых потоков, система линейных уравнений, подобная (349), должна быть составлена для температур [Л. 133, 276].

§ 40. Отражение в вогнутой поверхности

Рассмотрим вогнутую поверхность, ограниченную таким контуром, что проходящие через него лучи, отраженные этой поверхностью, на нее вновь не попадают. Этот контур ограничивает вместе с тем выходное отверстие. Такой поверхностью будет, например, цилиндрическая или часть сферы и т. п. Вследствие вогнутости поверхности, отраженный ею поток частично

¹ Необходимость и приближенный способ учета многократных отражений при естественном освещении указал Н. А. Рынин в 1908 г. [Л. 70]. Этот способ развили А. А. Гершун [Л. 203] и другие авторы [Л. 298.]

падает на нее же, и освещенность ее будет больше, чем создаваемая потоком, непосредственно падающим на нее извне. Увеличение освещенности можно подсчитать, суммируя последовательно происходящие отражения, как это часто делалось. Удобнее, однако, термодинамический способ расчета.

Пусть на рассматриваемую поверхность, коэффициент отражения которой ρ будем считать неизменным при всех отражениях, падает поток F_0 . В результате многократного отражения он увеличится до потока F , который нужно определить. По принципу сохранения поток F_0 должен быть равен сумме потока $(1-\rho)F$, прошедшего через поверхность, и потока $(1-\psi)\rho F$, ушедшего через выходное отверстие, где ψ — коэффициент самосвязи отражающей поверхности. Отсюда следует известная формула

$$F = \frac{F_0}{1 - \rho\psi}, \quad (350)$$

показывающая, что, как это очевидно, поток F равен сумме входящего потока F_0 и отраженного на поверхность потока $\rho\psi F$.

Поглощенный той же поверхностью поток равен [Л. 147].

$$\frac{1-\rho}{1-\rho\psi} F_0.$$

Введем коэффициент

$$\xi = \frac{1}{1 - \rho\psi}, \quad (351)$$

характеризующий увеличение потока вследствие отражения внутри поверхности, — коэффициент многократного отражения.

У плоских и выпуклых поверхностей $\psi = 0$ и $\xi = 1$, у вогнутых отражающих поверхностей $\xi > 1$. У замкнутой поверхности $\psi = 1$ и [Л. 51]

$$F = \frac{F_0}{1 - \rho}. \quad (352)$$

Если, например, $\rho = 0,9$, то, как следует из последней формулы, в замкнутой поверхности происходит десятикратное увеличение потока. Это увеличение обусловлено

происходящим во времени суммированием падающих потоков.

Предположим, что замкнутая поверхность представляет непрозрачный шар диаметра d и что в начальный момент на нее падает световой поток F_0 . После первого отражения будет падать поток $\Delta F = \rho F_0$, второе отражение даст $\Delta^2 F = \rho^2 F_0$ и т. д.; n -е отражение:

$$\Delta^n F = \rho^n F_0. \quad (353)$$

Чтобы претерпеть n отражений; луч, падающий из центра шара, должен пройти путь, равный $\left(n - \frac{1}{2}\right) d$.

При скорости света c это займет время t , причем

$$\left(n - \frac{1}{2}\right) d = ct;$$

отсюда

$$n = \frac{ct}{d} + \frac{1}{2}.$$

Положив, что в шаре пустота, т. е. $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/сек, что $\rho = 0,999$ и $d = 12$ см, найдем, следуя Дурньону [Л. 176], через сколько времени будет падать очередной отраженный поток, равный поглощаемому в начальный момент, т. е. $0,001 F_0$.

Из (353)

$$-3 = (2,5 \cdot 10^9 t : 0,5) \lg 0,999;$$

$$t = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ сек.}$$

Однако, если бы поток F_0 падал непрерывно все время, то через $2,8 \cdot 10^{-6}$ сек к нему добавился бы поток

$$\Delta F + \Delta^2 F + \dots + \Delta^n F,$$

что в сумме дало бы, при $n = 7000$,

$$(1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^n) F_0 = \frac{1 - \rho^{n+1}}{1 - \rho} F_0 = 999 F_0.$$

Установившееся же значение потока F_0 , по (352), равно $1000 F_0$. Этот пример показывает вместе с тем ход расчета многократного отражения методом суммирования, усовершенствование которого приводит к уравнениям, выведенным в § 38 и 39.

Чтобы воспользоваться формулой (350) в том случае, когда n равных частей s_i рассматриваемой поверхности s имеют различные коэффициенты отражения ρ_i , Филипс принимает [Л. 306], что число отражений от

каждой части пропорционально ее площади. Тогда средний коэффициент отражения ρ определяется по формуле

$$\lg \rho' = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^n s_i \lg \rho_i. \quad (354)$$

Коэффициент самосвязи и коэффициенты связи ψ_0 между поверхностью и ее выходными отверстиями находятся в соотношении

$$\psi = 1 - \sum \psi_0, \quad (355)$$

где знаком суммы предположено несколько выходных отверстий.

Пусть вогнутая поверхность s имеет отверстие s_0 , ограниченное плоским контуром (рис. 89), и отражает по закону Ламберта. Тогда ее можно заменить плоской фигурой, ограниченной контуром отверстия.

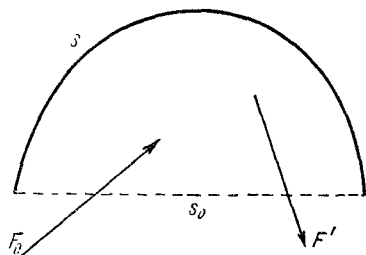


Рис. 89.

На такую фигуру будет падать световой поток F_0 , входящий в отверстие s_0 . Если поверхность s имеет коэффициент отражения ρ , то поток, выходящий из отверстия после всех отражений,

$$F' = \psi_0 \rho F,$$

где ψ_0 — коэффициент связи s с s_0 , а F — поток, падающий на s в результате отражений.

Пользуясь (350) и (355), находим, что плоская фигура s_0 имеет кажущийся коэффициент отражения (отношение F' к F_0), равный $\rho \xi \psi_0$, причем коэффициент многократного отражения [Л. 155]

$$\xi = \frac{1}{1 - \rho(1 - \psi_0)}, \quad (356)$$

где

$$\psi_0 = \frac{s_0}{s}.$$

При $\rho = 1$ из (356) и (350) находим, что

$$\frac{F}{s} = \frac{F_0}{s_0},$$

т. е. средняя освещенность вогнутой поверхности равна средней освещенности ее плоского отверстия входящим через него светом.¹

Если отражающая по закону Ламберта вогнутая поверхность — сфера, то нетрудно найти распределение света в ней и при переменном по ее поверхности коэффициенте отражения. Пусть $E_0(L)$ и $\rho(L)$ — начальная освещенность и коэффициент отражения элемента ds , находящегося в точке L сферической поверхности s . После первого отражения мы получим световой поток

$$F_1 = \int_s \rho(L) E_0(L) ds. \quad (357)$$

Этот поток, как и потоки, получаемые при следующих отражениях, освещает сферу равномерно, так как она является поверхностью, равноосвещенной каждым ее элементом (§ 19). Следовательно, после всех отражений потока F_1 на сфере получится за счет этого потока некоторая освещенность E' , одинаковая во всех ее точках. По принципу сохранения, тогда получаем:

$$F_1 = E' \int_s [1 - \rho(L)] ds. \quad (358)$$

Найдя E' из (358) и (357), получим следующее выражение полной освещенности в любой точке M сферы:

$$E(M) = E_0(M) + \frac{\int_s \rho(L) E_0(L) ds}{s - \int_s \rho(L) ds}. \quad (359)$$

Этот результат можно получить и из интегрального уравнения (343) [Л. 363].

Если в точке N сферы сделано отверстие ds_0 , через которое в сферу не входит сколько-нибудь заметного светового потока, то освещенности всех других точек изменятся. Это изменение можно найти, приписав элементу ds_0 отрицательную светность, с которой он излучает также по закону Ламберта,

$$R(N) = -\rho(N) E(N).$$

¹ П. Ю. Пархоменко, исследовавшая влияние многократных отражений света на естественное освещение помещений в 1936 г., указала, что при равном единице коэффициенте отражения поверхностей помещения их освещенность равна освещенности окна.

и

$$D_i = \begin{vmatrix} 1 & -f_{21} \cdots -f_{i-1,1} \xi_1 f_{01} & -F_{i+1,1} \cdots -f_{n1} \\ -f_{12} & 1 & \cdots -f_{i-1,2} \xi_2 F_{02} & -f_{i+1,2} \cdots -f_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -f_{1n} & -f_{2n} \cdots -f_{i-1,n} \xi_n F_{0n} & -f_{i+1,n} \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad (363)$$

найдем каждый из искоемых потоков как [Л. 225]

$$F_i = \frac{D_i}{D}. \quad (364)$$

По физическому смыслу все потоки F_i конечны и положительны. Поэтому всегда $D > 0$.

При $n=2$, раскрывая определители (362) и (363), получаем формулы Дурньона [Л. 129]:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \xi_1 \frac{F_{01} - \psi_{21} \psi_2 \xi_2 F_{02}}{1 - \psi_{12} \psi_{21} \psi_1 \psi_2 \xi_1 \xi_2}; \\ F_2 &= \xi_2 \frac{F_{02} - \psi_{12} \psi_1 \xi_1 F_{01}}{1 - \psi_{12} \psi_{21} \psi_1 \psi_2 \xi_1 \xi_2}. \end{aligned} \right\} \quad (365)$$

Этот случай подробно исследован в теплотехнике [Л. 190].

Вычисление по (364) усложняется с ростом n , по моделирование или машинное решение системы (361) устраняет это затруднение [Л. 305, 311, 376]. Имеется также решение задачи о многократном отражении в рядах труб [Л. 215].

Если отражающая поверхность прозрачна, имея коэффициент пропускания τ , то через нее проходит световой поток τF , где F — поток, вычисляемый по (364).

§ 42. Распределение света в полых прямоугольных параллелепипедах

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед со сторонами основания a , b и высотой h . Обозначим цифрой 1 верхнюю грань (потолок), цифрой 2 — совокупность четырех боковых граней (стены), цифрой 3 — основание. Из формул (362) — (364) следует, что световой поток, падающий на любую из этих поверхностей после всех отражений, является линейной функцией

начальных потоков, падающих на каждую поверхность непосредственно от источников.¹ Например [Л. 311],

$$F_3 = K_{13}F_{01} + K_{23}F_{02} + K_{33}F_{03}. \quad (366)$$

Коэффициенты K зависят от коэффициентов ρ , ξ и ψ . В рассматриваемом случае, по (71), (83) и (351),

$$\begin{aligned} \xi_1 = \xi_3 = 1; \quad \psi_{13} = \psi_{31}; \quad \psi_{12} = \psi_{21} = 1 - \psi_{13}; \\ \psi_{21} = \psi_{23} = \psi_{12} \frac{s_1}{s_2}; \quad \psi_{22} = 1 - 2\psi_{21}; \quad \xi_2 = \frac{1}{1 - \psi_{22}^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, все коэффициенты связи выражаются через ψ_{13} и отношение площадей основания и боковых граней. Согласно (210), при условии (211) коэффициент связи оснований параллелепипеда зависит от индекса

$$q = \frac{ab}{h(a+b)}; \quad (367)$$

отношение же

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{ab}{2h(a+b)} = \frac{q}{2}.$$

Следовательно, все коэффициенты связи определяются величиной q , от которой, при данном ρ_2 , зависят и ξ_2 . Таким образом, коэффициенты K определяются коэффициентами отражения рассматриваемых поверхностей параллелепипеда и, при условии (211), индексом его формы.

Пусть F — световой поток источников света, находящийся в параллелепипеде. Отношения

$$\eta_{0i} = \frac{F_{0i}}{F}; \quad \eta_{i1} = \frac{F_{i1}}{F}$$

называют соответственно коэффициентом первичного использования и коэффициентом использования потока F для поверхности s_i . Связь этих коэффициентов для уже рассмотренной, например, поверхности s_3 следует из (366):

$$\eta_3 = K_{13}\eta_{01} + K_{23}\eta_{02} + K_{33}\eta_{03}. \quad (368)$$

¹ Линейность нарушается при фотолюминесценции рассматриваемых поверхностей.

Рассмотрим частный случай, в котором свет поступает в параллелепипед через верхнюю грань. В этом случае $\eta_{01} = 0$, а η_{02} и η_{03} равны соответственно коэффициентам связи излучающего потолка со стенами и с основанием параллелепипеда. Если потолок излучает не по закону Ламберта, принимаемому для отражения от него, то коэффициенты первичного использования η_{02} и η_{03} могут отличаться от коэффициентов связи ψ_{12} и ψ_{13} , но, так же как и последние, при условии (211),

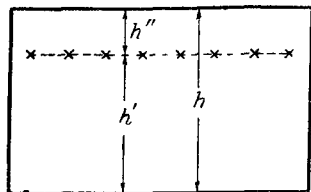


Рис. 90.

они определяются индексом q , вычисляемым по (367). Если в другом случае свет поступает в параллелепипед от системы точечных или линейных источников, расположенных на высоте h' над основанием, то, заменяя такую систему излучающей поверхностью (§ 29), найдем, что коэффициент первичного использования η_{03} ,

пропорциональный коэффициенту связи этой поверхности с основанием, определяется величиной

$$q' = \frac{ab}{h'(a+b)}. \quad (369)$$

Так же коэффициент η_{01} определяется величиной

$$q'' = \frac{ab}{h''(a+b)}, \quad (370)$$

где h'' — высота верхней грани над системой источников (рис. 90).

Очевидно, что коэффициент η_{02} должен зависеть как от q' так и от q'' . Заметим, что значения q' и q'' удовлетворяют условно (211), если ему удовлетворяет значение q .

Таким образом, в общем случае часть величин, от которых зависит коэффициент использования η_3 , определяется значением q , часть — значением q' , часть же — значением q'' . Поскольку, однако,

$$q = q' \frac{h'}{h} = q'' \frac{h''}{h},$$

коэффициент использования можно определять в функции любой из этих величин, в частности q' , называемой индексом помещения, если только отношения h'/h и h''/h изменяются в достаточно узких пределах. Поэтому выражение индекса помещения широко применяется в расчетах освещения.¹

Вычисление коэффициентов использования позволяет, очевидно, найти средние освещенности или светности всех граней параллелепипеда. При рассмотренных способах освещения наименее равномерно будут освещены боковые грани. Более подробное исследование их освещения может быть сделано тем же способом, если разбить стены параллелепипеда на несколько частей по высоте. Решение этой задачи получено [Л. 267, 268, 273] также с помощью интегральных уравнений. Существенно отметить, что при этом вводилось аппроксимированное по Муну [Л. 252] ядро вида (347), чем подтверждается, что распределение света в параллелепипедах зависит от индекса формы q .

Интегральные уравнения с так же аппроксимированным ядром применяют и к расчету коэффициентов использования [Л. 273, 317]. Однако, по причинам, отмеченным в § 38, эти применения интегральных уравнений связаны с некоторыми погрешностями [Л. 303, 313, 319].

Погрешность, зависящая от аппроксимации ядра, исследована теоретически; она возрастает с уменьшением индекса q [Л. 323]. От этих погрешностей свободен метод, изложенный выше [Л. 276]. Дурньон, основоположник последнего, применял его [Л. 129] к параллелепипеду с двумя отражающими поверхностями ($\rho_3=0$).

Впоследствии метод был развит для применения к любому числу отражающих поверхностей [Л. 225, 280] и для решения задачи с помощью электронных вычислительных машин [Л. 311]. Следует отметить, что применение приближенно решаемых уравнений в рассмотренных задачах не делает их более легкими, чем по методу

¹ Его связывают с именем Хизано, который ввел величину, обратную $2q$, в 1936 г. [Л. 224], хотя формула (367), следующая из соотношения, указанного Маргулисом [Л. 130], как и формула (369), полученная из экспериментальных данных, были напечатаны в Трудях II Всесоюзной светотехнической конференции в 1931 г. [Л. 152].

Дурньона, в особенности при машинном решении [Л. 340].

Посредством электромоделирования может быть рассчитано распределение света в параллелепипедах любой формы, освещенных несимметрично, с учетом различий разных частей их граней [Л. 322, 335].

Пользуясь вычислительной машиной, О'Брайен исследовал распределение света в 35 000 параллелепипедов, различных по форме и по коэффициентам отражения их граней [Л. 346]. Это исследование показало, что при одинаковых индексах q распределение света слабо зависит от формы параллелепипеда. Наибольшее расхождение, достигающее 10%, обнаружено между параллелепипедами с квадратным и бесконечно длинным основаниями при наименьшем из исследованных значений индекса q , равном 0,5.

Для проектирования осветительных установок имеет важнейшее значение коэффициент использования, определяемый относительно горизонтальной плоскости, на уровне которой должно быть обеспечено освещение.

Численное определение коэффициентов использования первоначально было сделано экспериментально в известных работах Гаррисона и Андерсона [Л. 93, 103], что позволяло учесть все влияющие факторы, но затрудняло переход к условиям, отличавшимся от осуществленных в экспериментах, возникавшим по мере развития техники. Поэтому была поставлена задача расчета коэффициентов использования и были предложены методы ее решения [Л. 119, 129, 134, 328]. Существенной частью этой задачи является учет световых потоков, отраженных поверхностями помещения. Был предложен ряд методов, учитывающих отражение от стен и потолка [Л. 265, 270]. В дальнейшем выяснилось, что целесообразно учитывать отражение также от пола [Л. 273, 290, 327].

В действительности отражают все поверхности, находящиеся ниже расчетной плоскости. Между ними и остальными поверхностями помещения происходит многократное отражение, в результате которого некоторый световой поток падает на расчетную плоскость [Л. 317]. Ниже расчетной плоскости находятся поверхности пола

и разнообразного оборудования. Достаточно учесть их влияние, введя коэффициент отражения расчетной плоскости. Тогда задача сводится к расчету многократного отражения между тремя поверхностями. Для ее решения можно воспользоваться формулой (364) при $n=3$, что приводит к общим выражениям потоков, падающих на рассматриваемые поверхности; она была решена применительно к расчету коэффициента использования [Л. 344] и светностей поверхностей помещения [Л. 329, 383] при проектировании освещения.

Та же задача решена при помощи интегральных уравнений [Л. 273]. Предложен также приближенный способ расчета по средним коэффициентам отражения [Л. 300].

Учитывая отражение от части помещения, находящейся выше плоскости расположения светильников, так же, как и от части помещения под расчетной плоскостью, можно свести дело к аналогичному расчету многократного отражения между тремя полостями, на которые подразделяется помещение: под расчетной плоскостью, над плоскостью расположения светильников и между этими плоскостями [Л. 321]. Этот принцип привел к развитию особого зонально-полостного метода решения ряда задач, возникающих при проектировании освещения, в частности для помещений неправильной формы, освещенных по-разному в разных частях, имеющих перегородки, при необходимости обеспечить вертикальную освещенность и яркость стен [Л. 383]. Для решения такого рода задач существуют и другие методы [Л. 333, 334, 382].

§ 43. Избирательное отражение

Рассмотрим расчет многократного отражения в том случае, когда падающий поток имеет сложный спектральный состав, а отражающие поверхности обладают избирательными свойствами [Л. 344, 398].

Пусть распределение энергии в первоначальном спектре потока, падающего на вогнутую поверхность, дано зависимостью спектральной плотности потока ρ_λ от длины волны и известна зависимость от длины волны коэффициента отражения ρ_λ , одинаковая по всей поверхности.

Начальный световой поток на участке спектра $d\lambda$ при длине волны λ равен, согласно (31),

$$K_0 \rho_\lambda d\lambda.$$

В результате многократного отражения он увеличивается, по (350), до

$$\frac{K_{\lambda} \rho_{\lambda} d\lambda}{1 - \rho_{\lambda} \psi_{\lambda}},$$

где ψ_{λ} — коэффициент самосвязи рассматриваемой поверхности.

Следовательно, световой поток во всем спектральном интервале, падающий на эту поверхность после всех отражений в ней,

$$F = \int_0^{\infty} \frac{K_{\lambda} \rho_{\lambda}}{1 - \rho_{\lambda} \psi_{\lambda}} d\lambda. \quad (371)$$

Вычисление интеграла может быть сделано графически, если построить кривую, точки которой имеют прямоугольные координаты λ и

$$\frac{K_{\lambda} \rho_{\lambda}}{1 - \rho_{\lambda} \psi_{\lambda}}.$$

Если допустить для упрощения, что светность, получаемая после всех отражений в каждом интервале спектра, постоянна по всей поверхности, то коэффициент самосвязи можно считать постоянным по спектру, предполагая, что закон отражения (индикатриса) также не зависит от длины волны.

Подобный расчет можно сделать и для системы n поверхностей, обладающих теми же свойствами. Каждая поверхность будет характеризоваться зависящими от длины волн коэффициентами ρ_{λ} и ξ_{λ} . В соответственном интервале $d\lambda$ спектра источники света посылают непосредственно на отражающие поверхности потоки dF_{01} , dF_{02} , ..., dF_{0n} . Подставив эти потоки в (364), найдем потоки dF_1 , dF_2 , ..., dF_n того же спектрального интервала, падающие на эти поверхности после всех отражений.

Поток всего спектра, падающий на какую-либо поверхность,

$$F_i = \int_0^{\infty} \frac{dF_i}{d\lambda} d\lambda, \quad (372)$$

т. е. равен сумме падающих на эту поверхность потоков всех спектральных интервалов.

**НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ,
РЕШАЕМЫЕ ФОТОМЕТРИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ****§ 44. О применении фотометрических соотношений**

Теоретическая фотометрия находит непосредственное применение в практических задачах светотехники. Не касаясь этих хорошо известных задач, частично упомянутых ранее, остановимся на некоторых других аспектах приложения теории, рассмотренной в предыдущих главах.

Методы теоретической фотометрии, изложенные выше применительно, главным образом, к распространению радиации в пустоте, полезны и для решения задач, относящихся к другим условиям распространения. Одна из таких задач — приведенное в следующих параграфах исследование плоскопараллельных поглощающих слоев. Давая известные выражения характеристик слоя, это исследование показывает, насколько упрощается их вывод с помощью рассмотренных выше методов.

Те же методы должны получить естественное применение для исследования явлений, происходящих в других областях спектра, которые оставались в стороне от развития фотометрии. Последнее обстоятельство исторически обусловило появление повторных решений одних и тех же задач [Л. 140]: то, что было сделано в фотометрии, подчас остается неизвестным в смежных областях науки [Л. 331]. Далее приведем пример применения фотометрических соотношений к дозиметрии гамма-излучения.

В теплотехнике, при изучении теплопередачи излучением, необходимо исследование ряда проблем, по существу являющихся фотометрическими. На этом, в частности, основано моделирование лучистого теплообмена в топках и печах, происходящего при высоких температурах, на холодных световых моделях [Л. 312, 332, 348]. Тенденция к обобщению теоретических результатов, полученных в светотехнике и теплотехнике [Л. 180], и к слиянию достигнутого в обеих областях [Л. 276, 280, 293, 314] весьма полезна. Ниже приведен пример

фотометрического решения одной теплотехнической задачи.

Аналогичное значение имеют фотометрические проблемы для гелиотехники [Л. 171].

Фотометрические соотношения получают также новые применения, основанные на математической аналогии. Эти применения возможны в различных областях [Л. 145], где изучают перенос или распространение каких-либо величин. Теоретическая фотометрия даст модели таких процессов [Л. 396]. Задачи о распространении лучистой энергии оказываются, в частности, родственными задачам о распространении потоков молекул и нейтронов (§ 49).

Примерами, рассмотренными в этой главе, не исчерпываются, конечно, существующие и возможные применения методов теоретической фотометрии в науке и технике.

§ 45. Инвариант Стокса

Рассмотрим две группы бесконечных плоскопараллельных слоев, расположенных параллельно. Предположим, что все слои одинаковы, причем одна группа содержит M , а другая N слоев. Коэффициенты отражения и пропускания, характеризующие эти группы в целом, обозначим через ρ_M , τ_M и ρ_N , τ_N . Если на первую группу падает световой поток F , то на ее поверхность, обращенную к другой, будет падать некоторый поток F_M , а на такую же поверхность второй группы — поток F_N (рис. 91).

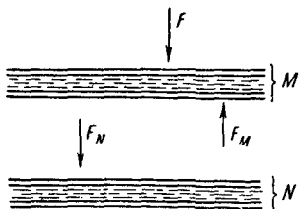


Рис. 91.

Потоки F_M и F_N образуются в результате многократного

отражения между группами. Световой поток, отраженный обоими группами слоев, равен

$$\rho_M F + \tau_M F_M,$$

а пропущенный ими:

$$\tau_N F_N.$$

Следовательно, коэффициенты отражения и пропускания обеих групп, вместе взятых,

$$\left. \begin{aligned} \rho_{MN} &= \rho_M + \tau_M \frac{F_M}{F}; \\ \tau_{MN} &= \tau_N \frac{F_N}{F}. \end{aligned} \right\} \quad (373)$$

Потоки F_M и F_N могут быть вычислены по формулам Дурньона. Поскольку поверхности, на которые падают эти потоки, плоские, коэффициенты многократного отражения

$$\xi_M = \xi_N = 1.$$

Поскольку же эти поверхности бесконечно протяженны и параллельны, коэффициенты связи их

$$\psi_{MN} = \psi_{NM} = 1.$$

Поток F_{0M} , непосредственно падающий на рассматриваемую поверхность первой группы, отсутствует, т. е.

$$F_{0M} = 0,$$

а на поверхность второй группы падает поток

$$F_{0N} = \tau_M F.$$

Тогда, по (365), получаем:

$$F_M = \frac{\rho_N \tau_M F}{1 - \rho_M \rho_N}; \quad F_N = \frac{\tau_M F}{1 - \rho_M \rho_N}.$$

Подставляя это в (373), находим:

$$\rho_{MN} = \rho_M + \frac{\rho_N \tau_M^2}{1 - \rho_M \rho_N}; \quad (374)$$

$$\tau_{MN} = \frac{\tau_M \tau_N}{1 - \rho_M \rho_N}; \quad (375)$$

это — формулы, впервые выведенные Стоксом [Л. 28].

Приводя обе части уравнения (374) к общему знаменателю, напишем его в виде:

$$\rho_{MN} (1 - \rho_M \rho_N) = \rho_M + \rho_N (\tau_M^2 - \rho_M^2).$$

Заметим, что, поменяв местами группы M и N , мы не получим изменения коэффициента отражения ρ_{MN} : так как, по сделанному предположению, все слои, составляющие обе группы, одинаковы. Поэтому левая часть последнего уравнения при таком перемещении рассматриваемых групп не изменится. Следовательно, правая часть его также не изменяется при перестановке коэффициентов, относящихся к первой и второй группам, т. е.

$$\rho_M + \rho_N (\tau_M^2 - \rho_M^2) = \rho_N + \rho_M (\tau_N^2 - \rho_N^2).$$

Деля обе части этого выражения на произведение $\rho_M \rho_N$, получаем:

$$\frac{1}{\rho_N} + \frac{\tau_M^2 - \rho_M^2}{\rho_M} = \frac{1}{\rho_N} + \frac{\tau_N^2 - \rho_N^2}{\rho_N};$$

это означает, что

$$\frac{1 - \tau_N^2 - \rho_N^2}{\rho_N} = \text{const} \quad (376)$$

при $N = \text{var}$; это — инвариант Стокса для плоскопараллельных слоев.

Пользуясь инвариантом Стокса, можно вычислить один из коэффициентов — ρ или τ — группы, состоящей из любого числа N плоскопараллельных слоев, если для этой группы известен другой коэффициент и если известны оба коэффициента для одного слоя.

§ 46. Отражение и пропускание света плоскопараллельным слоем

Рассмотрим безгранично протяженный плоскопараллельный слой рассеивающего вещества, отделенный от окружающей среды двумя плоскостями раздела. Положим, что на верхнюю плоскость раздела (рис. 92) падает извне световой поток F . Внутри слоя при этом происходит многократное отражение между следующими поверхностями, занумерованными на рисунке:

- 1 — внутренняя сторона верхней плоскости раздела;
- 2 — верхняя поверхность рассеивающего слоя;
- 3 — нижняя поверхность того же слоя;
- 4 — внутренняя сторона нижней поверхности раздела.

В результате многократного отражения на эти поверхности будут падать потоки F_1 , F_2 , F_3 и F_4 . Характеризующие эти поверхности коэффициенты отражения обозначим соответственно через ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , ρ_4 . В общем случае $\rho_1 \neq \rho_4$, но $\rho_2 = \rho_3 = \rho'$, если ρ' — коэффициент отражения рассеивающим слоем. Введем еще коэффициент пропускания тем же слоем τ' и коэффициент отражения ρ_0 внешней стороной верхней плоскости раздела.

Полный поток, отраженный слоем, при сделанных предположениях должен быть равен

$$\rho_0 F + (1 - \rho_1) F_1,$$

а полный поток, пропущенный слоем,

$$(1 - \rho_4) F_4.$$

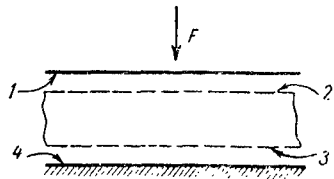


Рис. 92.

Следовательно, коэффициенты отражения и пропускания всем слоем:

$$\rho = \rho_0 + (1 - \rho_1) \frac{F_1}{F}; \quad (377)$$

$$\tau = (1 - \rho_4) \frac{F_4}{F}. \quad (378)$$

Потоки F_1 и F_4 найдем по формуле (364), вычислив определители D , D_1 и D_4 .

Поскольку все четыре отражающие поверхности плоские, коэффициенты многократного отражения

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 1.$$

Замечая, что поверхности 1 и 2, а также 3 и 4 прилегают друг к другу, находим, что коэффициенты связи

$$\psi_{12} = \psi_{21} = 1;$$

$$\psi_{34} = \psi_{43} = 1.$$

С поверхности 3 ничего не попадает на 1 и 2, а со 2 — не попадает на 3 и 4; поэтому

$$\psi_{13} = \psi_{31} = \psi_{23} = \psi_{32} = \psi_{24} = \psi_{42} = 0.$$

Наконец, заметим, что

$$\psi_{14} = \psi_{41} = \tau'.$$

Непосредственно, т. е. извне, не падает никакого потока на поверхности 1 и 3:

$$F_{01} = F_{03} = 0.$$

На поверхность 2 непосредственно, без отражения от других поверхностей, падает поток

$$F_{02} = (1 - \rho_0) F,$$

а на поверхность 4

$$F_{04} = (1 - \rho_0) \tau' F.$$

Теперь, полагая для упрощения выкладок, $F=1$, получаем, по (362):

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -\rho' & 0 & -\rho_4 \tau' \\ -\rho_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\rho_4 \\ -\rho_1 \tau' & 0 & -\rho' & 1 \end{vmatrix} = \\ = 1 - (\rho_1 + \rho_4) \rho' - \rho_1 \rho_4 (\tau'^2 - \rho'^2).$$

По (363), затем получаем:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -\rho' & 0 & -\rho_4 \tau' \\ 1 - \rho_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\rho_4 \\ (1 - \rho_0) \tau' & 0 & -\rho' & 1 \end{vmatrix} = \\ = (1 - \rho_0) [\rho' + \rho_4 (\tau'^2 - \rho'^2)]; \\ D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -\rho' & 0 & 0 \\ -\rho_1 & 1 & 0 & 1 - \rho_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\rho_1 \tau' & 0 & -\rho' & (1 - \rho_0) \tau' \end{vmatrix} = (1 - \rho_0) \tau'.$$

Тогда, по (377), (378) и (364), находим:

$$\rho = \rho_0 + (1 - \rho_0) (1 - \rho_1) \frac{\rho' + \rho_4 (\tau'^2 - \rho'^2)}{1 - (\rho_1 + \rho_4) \rho' - \rho_1 \rho_4 (\tau'^2 - \rho'^2)}; \quad (379)$$

$$\tau = \frac{(1 - \rho_0) (1 - \rho_4) \tau'}{1 - (\rho_1 + \rho_4) \rho' - \rho_1 \rho_4 (\tau'^2 - \rho'^2)}. \quad (380)$$

В частном случае $\rho_1 = \rho_4$ из последних выражений следуют формулы Райда и Купера [Л. 168]. Если слой

не рассеивает, то $\rho' = 0$. При освещении такого слоя одним лучом $\rho_0 = \rho_1$ и коэффициенты ρ и τ получают выражения [Л. 359], которые в таком частном случае также следуют из (379) и (380).

§ 47. Дозиметрия гамма-излучения

Ионизирующее действие гамма-лучей зависит от объемной плотности их энергии. Величина, определяющая это действие,— мощность экспозиционной дозы излучения.

Равномерный точечный источник гамма-лучей создает на расстоянии r в среде, влиянием которой можно пренебречь, дозу мощностью

$$P = P_{\gamma} \frac{C}{r^2}, \quad (381)$$

где C — активность источника, а P_{γ} — его гамма-постоянная, равная мощности дозы, получаемой от рассматриваемого источника на единичном расстоянии при единичной активности.

Измеряя мощность дозы рентгенами в секунду, активность — милликюри, расстояние — сантиметрами, получают для гамма-постоянной единицу $p \cdot \text{см}^2/\text{мкюри} \cdot \text{сек}$.

В единицах СИ мощность экспозиционной дозы измеряется амперами на килограмм, активность — единицами, обратными секунде, и для гамма-постоянной получается единица $a \cdot \text{см}^2 \cdot \text{сек}/\text{кг}$.

Фотометрическим аналогом мощности дозы (381) является нормальная освещенность от равномерного точечного источника, дающего световой поток F :

$$E_n = \frac{F}{4\pi r^2}. \quad (382)$$

Нормальная освещенность в поле точечного источника равна пространственной освещенности (§ 6), т. е. пропорциональна объемной плотности световой энергии (§ 14). Поэтому выражения (381) и (382) аналогичны не только формально, но и по физическому смыслу. Эта аналогия позволяет установить связь фотометрии с дозиметрией.

Полагая, что точечный источник гамма-лучей, которым могут быть также элементы излучателей конечных

размеров, является равномерным, легко получить выражения мощности дозы из фотометрических выражений нормальной освещенности, заменяя в них световой поток активностью S , а величину, обратную эквивалентному телесному углу, равную $1/4\pi$ (для элемента излучающей поверхности $1/2\pi$), — гамма-постоянной P_γ .

Как пример применения фотометрических соотношений в дозиметрии найдем мощность дозы в произвольной точке $M(\xi, \eta)$ поля излучающего диска радиуса c

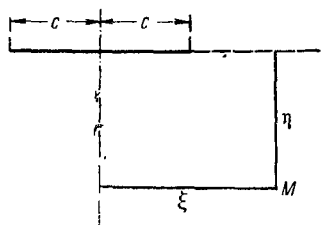


Рис. 93.

(рис. 93). Активность, приходящаяся на единицу излучающей поверхности, обозначим через σ . Принимая, что эта поверхность излучает по закону Эйлера, найдем пространственную освещенность в рассматриваемой точке по формуле (203), полагая $m=0$. Тогда квазипотенциал W_{m+1} должен иметь выражение (319). Под-

ставляя это выражение в (203) и заменяя $R/2$ на $\pi P_\gamma \sigma$, получаем:

$$P = \pi P_\gamma \sigma \ln \frac{\eta^2 - \xi^2 + c^2 + \sqrt{(\eta^2 - \xi^2 + c^2)^2 - 4c^2\xi^2}}{2\xi^2}; \quad (383)$$

это несколько преобразованная формула, известная в дозиметрии.

Установленное соотношение между фотометрическими и дозиметрическими величинами позволяет также получать выражения нормальной освещенности из выражений мощности дозы, выведенных в дозиметрии для различных излучателей [Л. 349].

§ 48. Коэффициент связи ряда труб и стенки

Эта задача, имеющая важное значение для теплотехники, легко решается [Л. 250] по теореме Крофтона (§ 37).

Ряд равноотстоящих труб, излучающих по закону Ламберта, оси которых расположены в одной плоскости (рис. 94), облучает параллельную ему стенку. Расстояние от труб до стенки значительно меньше их длины,

так что при вычислении коэффициента связи можно пренебречь краевым эффектом и считать длину труб бесконечной, как и ширину стенки.

Рассмотрим две соседние трубы 1 и 2 (рис. 95). Поток, падающий на стенку от трубы 1, равен удвоенному потоку, падающему от нее на полосу a_1b_1 . Построив внутреннюю касательную a_2b_2 , имеем излучающую поверхность a_1a_2 , освещающую a_1b_1 и замыкающую $a_2b_2b_1$.

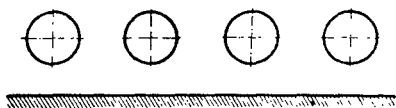


Рис. 94.

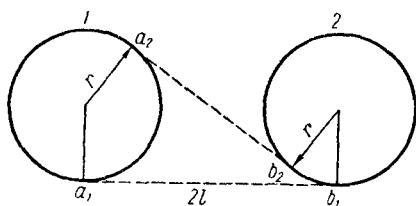


Рис. 95.

Если r — радиус трубы, а $2l$ — расстояние между осями соседних труб, то

$$\begin{aligned} \overline{a_1b_1} &= 2l; \quad \overline{a_2b_2} = 2\sqrt{l^2 - r^2}; \\ \overline{a_1a_2} &= r \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{l^2}{r^2} - 1} \right); \\ \overline{b_1b_2} &= r \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{l^2}{r^2} - 1} \right); \\ \overline{a_2b_2b_1} &= \overline{a_2b_2} + \overline{b_1b_2}. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае излучающая и освещаемая поверхности невогнутые, поэтому по (334) $\psi_{11} = \psi_{10} = 0$. Тогда коэффициент связи трубы и стенки, равный искомому коэффициенту связи,

$$\psi = 2 \frac{x - \sqrt{x^2 - 1} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1}}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1}}, \quad (384)$$

где $x = l/r$.

Формула (384) применима в расчете паровых котлов, свистильников с люминесцентными лампами.

§ 49. Перенос частиц

Клаузинг обратил внимание [Л. 137] на то, что формулы, выражающие количество частиц, проходящих в разреженном газе через отверстия с параллельными контурами, совпадают с выражениями светового потока, проходящего с поверхности, ограниченной одним из таких контуров, через другой, когда эта поверхность излучает по закону Ламберта. Причина этого в том, что в разреженном газе происходит движение частиц, идущих в некоторых пределах от одного контура до другого без столкновений, по прямым линиям, так же, как распространение радиации в однородной среде; число частиц, проходящих в разных направлениях через отверстие, пропорционально косинусу угла между рассматриваемым направлением и нормалью к плоскости отверстия, а количество частиц, проходящих через элементы двух отверстий, обратно пропорционально квадрату расстояния между этими элементами.

Применение этого метода к исследованию молекулярных потоков систематически показал и развил Ю. Н. Любитов [Л. 377]. Сюда относится изучение таких явлений, как отражение молекулярных потоков от стенок сосудов, ограничивающих их распространение, что аналогично отражению света; как влияние столкновений между молекулами, что аналогично поглощению света при распространении в однородной среде; как испарение, и другие.

Фотометрические методы применимы также в теории переноса нейтронов [Л. 325]. Как и при исследовании распространения других корпускулярных потоков, основанием этому служит не только математическая, но и физическая аналогия, связанная с представлением радиации в виде потока фотонов.

ЛИТЕРАТУРА

Сокращенные обозначения

ДАН — Доклады Академии Наук СССР.

ЖРФХО — Журнал Русского физико-химического общества.

ЖТФ — Журнал технической физики.

ИТН — Известия Академии Наук СССР. Отделение технических наук.

С — «Светотехника».

СЛНТОТ — Сборник работ светотехнического отдела Ленинградского института охраны труда.

СТС — Сборник трудов по светотехнике; Академия Наук СССР.

ТГОИ — Труды Государственного оптического института.

Тр.ВСК — Труды Всесоюзной светотехнической конференции.

ТСС — Труды светотехнической секции Ленинградского областного энергетического комитета; с 1936 г. — Всесоюзного научного инженерно-технического общества энергетики и электросвязи.

УФН — «Успехи физических наук».

Э — «Электричество».

АЛЕИ — Atti della Associazione Elettrotecnica Italiana.

АСhPh — Annales de Chimie et Physique.

AWD — Archiv für Wärmenwirtschaft und Dampfkesselwesen.

BBS — Bulletin of the Bureau of Standards.

CR — Comptes rendus hebdomadaires de séances de l'Académie des Sciences, Paris.

CRCAE — Comptes rendus du Congrès international des Applications de l'Éclairage.

E — L'Elettrotecnica.

ETZ — Elektrotechnische Zeitschrift.

EW — Electrical World.

GI — Gesundheitsingenieur.

GER — General Electric Review.

IE — Illuminating Engineering; до 1940 г. — Transactions of the Illuminating Engineering Society, New York.

JFI — Journal of the Franklin Institute.

JIEIJ — Journal of the Illuminating Engineering Institute of Japan.

JMPPh — Journal of Mathematics and Physics.

JOSA — Journal of the Optical Society of America.

L — Die Lichttechnik (приложение к ЕuM).

LaL — Light and Lighting; до 1936 г. — The Illuminating Engineer.

LE — La Lumière Électrique.

Licht — Das Licht.

MIES — Monograph of the Illuminating Engineering Society, London.

Phil. Mag. — Philosophical Magazine.

PPhS — Proceedings of the Physical Society of London.

Pogg. Ann. — Annalen der Physik und Chemie.

PICI — International Congress on Illumination, Proceedings.

PIIC — Proceedings of the International Illumination Congress.

REL — Researches of the Electrotechnical Laboratory, Tokyo.

GRE — Revue générale de l'Électricité.

The IE — The Illuminating Engineer, New York.

TIES — Transactions of the Illuminating Engineering Society, London.

Wied. Ann. — Annalen der Physik und Chemie.

ZB — Zeitschrift für Beleuchtungswesen.

ZdB — Zentralblatt der Bauverwaltung.

1540 г.

1. L.-B. Alberti, De pictura, Basel. См. [Л. 18] и Л.-Б. Альберти, Десять книг о зодчестве, 2, 25, Всесоюзн. Ак. архитектуры, 1937 г.

1575 г.

2. F. Maurolico, Photismi de lumine, Veneti. См. его же Theoremata de lumine, Lugdini, 1617 и The Photismi de lumine of Maurolycus, N. Y., 1940.

1604 г.

3. J. Kepler, Astronomiae pars optica, Francofurti. См. Gesamtelte Werke, 2, München, 1939.

4. F. Aguilonii, Opticorum libri, Antverpiae.

1632 г.

5. G. Galilei, Dialogo, Frolenza. См. Г. Галилей, Диалог о двух главнейших системах мира..., ГТТИ, 1948

1651 г.

6. L. da Vinci, Trattato della pittura, Paris, См. Л. да Винчи, Книга о живописи, Изогиз, 1934.

1700 г.

7. F. Marie, Nouvelle découverte sur la lumière, Paris. См. [Л. 278].

1729 г.

8. P. Bouguer, Essai d'optique..., Paris; новое издание, Paris, 1921. См. [Л. 108].

1732 г.

9. J. S. Kurdwanowski, Problèmes sur la lumière. См. Hist. de l'Acad. des Sciences, année 1732, 95, Paris, 1735.

1752 з.

10. L. Euler, Réflexions sur les divers degrés de lumière du soleil et des autres corps célestes, Hist. de l'Acad. des Sciences, année 1750, 280, Berlin.

1760 з.

11. P. Bouguer, Traité d'optique sur la gradation de la lumière, Paris. См. [Л. 278].

12. J. H. Lambert, Photometria sive de mensura et gradibus liminis, colorum et umbrae, Augsburg. См. Lambert's Photometria с примеч. Е. Anding'a, Leipzig, 1892 и [Л. 370].

1770 з.

13. J. H. Lambert, Sur la partie photométrique de tout l'art de peintre, Histoire de l'Acad. Royale, année 1768, 80, Berlin.

14. Его же, Sur les portes-lumières appliquées à la lampe, Nouv. Mém. de l'Acad. Royale, année 1770, 51, Berlin.

1772 з.

15. H. H. Kaestner, Bestätigte Vorschriftelst ueber die beste Erleuchtung einer Ebene mittelst einer Lampe, Wien.

16. J. H. Lambert, Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten (в его книге Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, dritter Teil, 105, Berlin). См. Ostwald's Klassiker, N. 54 (1894).

1777 з.

17. W. J. Karsten, Lehrbegriff der gesammten Mathematik, achter Teil: Die Photometrie, Greifswald.

1804 з.

18. L. Alberti, Della pittura e della statua, Milano.

1817 з.

19. J.-B. Fourier, Note sur la chaleur rayonnante, AChPh, 4, 128. См. Pogg. Ann., 2 (1824), 375, а также [Л. 20, 23].

20. Его же. Question sur la théorie physique de la chaleur rayonnante, AChPh, 6, 259.

21. J. Herschel, On-light, Encyclop. metrop., 2, 349.

1823 з.

22. A. M. Bordoni, Sopra le linee uniformemente illuminate, Giorn. de Fisica, Chimica, e Storia Naturale, 6, 196. См. Zeitschr. f. Phys., Math. u. verwandte Wissenschaften, 4, 385.

1824 з.

23. J.-B. Fourier, Résumé théorique des propriétés de la chaleur rayonnante, AChPh, 27, 236.

1835 z.

24. S.-D. Poisson, Théorie mathématique de la chaleur, Paris.

1853 z.

25. A. Beer, Vier photometrische Probleme, Pogg. Ann., 88, 114.

1854 z.

26. A. Beer, Grundriss der photometrischen Calcüles, Braunschweig.

1862 z.

27. J. Rheinauer, Grundzüge der Photometrie, Halle.

28. G. G. Stokes, On the intensity of the light reflected from or transmitted through a pile of plates, Proc. of the Royale Soc. of Lond., 11, 545. См. также Mathematical and physical papers, 4, 145, Cambridge, 1904.

1864 z.

29. R. Clausius, Ueber die Concentration von Wärme- und Lichtstrahlen, Pogg. Ann., 121, 1.

30. A. Stuhlmann, Die von einem Punkte gleich erleuchteten Linien und Flächen, Göttingen.

1865 z.

31. L. Burmester, Elemente einer Theorie der Isophoten, Göttingen.

32. J. Weinberg, Sur le maximum d'éclairage d'un point donné par un ou deux points lumineux, Bull. de la Soc. des Naturalistes de Moscou, № 4, 435.

33. F. Zöllner, Photometrische Untersuchungen mit besonderer Rücksicht auf die physische Beschaffenheit der Himmelskörper, Leipzig.

1866 z.

34. F. Zöllner, Einige Sätze aus der theoretischen Photometrie, Pogg. Ann. 128, 46.

1868 z.

35. M. W. Crofton, On the theory of local probability, Trans. of the Royale Soc. of Lond., 158, 181. См. также [Л. 231].

1870 z.

36. W. v. Bezold, Einige analoge Sätze der Photometrie und Anziehungslehre. Pogg. Ann., 141, 91.

1871 z.

37. L. Burmester, Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Flächen, Leipzig.

38. H. Cox, The law and science of ancient lights, sec. ed., London.

1872 г.

39. S. Günther, Studien zur theoretischen Photometrie, Erlangen.

1879 г.

40. А. К. Кононович, Независимое от исчисления Ламберта определение albedo белого картона, Записки матем. отдел. Новороссийск. об-ва естествоиспытателей, 2, 79.

1880 г.

41. В. Н. Чиколев, Об электрическом освещении улиц, мостов и площадей, Э, 106 и 120. См. Избр. тр., ГЭИ. 1949.

1883 г.

42. А. К. Кононович, Фотометрические исследования планет Марса, Юпитера и Сатурна, Записки Новороссийского уп-та, 37, 63.

43. Е. П. Тверитинов, Электрическое освещение, 1, СПб.

44. Ch. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 1, Leipzig.

1885 г.

45. K. Angström, Ueber die Diffusion der strahlenden Wärme von ebenen Flächen, Wied. Ann., 26, 253.

46. L. Weber, Intensitätsmessungen des diffusen Tageslichtes, Meteorolog. Zeitschr., 2, 163, 219, 451. См. Wied. Ann., 26, 374.

47. Его же, Kurven zur Berechnung der von künstlichen Lichtquellen indizierten Helligkeit, Berlin. См. ETZ, 6, 55.

48. J. Wybauw, Mesure et répartition de l'éclairage dans les espaces libres et dans les locaux fermés, Bull. de la Soc. belge d'électriciens, 2, 78.

1887 г.

49. C. E. Guillaume, Sur l'éclairage d'une surface plane, LE, 26, 42 и 101.

50. P.-H. Ledebœr, Les essais photométrique de l'exposition d'Anvers, LE, 26, 60.

1888 г.

51. E. Mascart, Sur la mesure d'éclairage, Bull. de la Soc. internation. des Electr., 5, 103. См. LE, 28, 180.

1889 г.

52. E. Liebenthal, Das Parallelogramm der Maximalbeleuchtungsstärken und die Frage nach der grösstmöglichen Beleuchtung eines um einen festen Punkt drehbaren Ebenstücks, wenn zwei oder mehrere Lichtquellen vorhanden sind, Journ. f. Gasbeleuchtung u. Wasserversorgung, 32, 687.

1891 г.

53. H. Höhl, Studien über Probleme der theoretischen Photometrie in der Physik und Astronomie, München.

1893 г.

54. W. E. Sumpner, The diffusion of light, Phil. Mag., 35, 81. См. PPhS, 12, 10.

1895 г.

55. A. Blondel, La détermination de l'intensité moyenne sphérique des sources de lumière, L'Eclair. Electr., 2, 385.

56. Ег о ж е, Sur la mesure flux lumineux, CR, 120, 311.

1898 г.

57. R. Mehnke, Über die mathematische Bestimmung der Helligkeit in Räumen mit Tagesbeleuchtung, in besondere Gemäldesälen mit Deckenlicht, Zeitschr. f. Mathem. u. Phys., 43, 41.

1899 г.

58. В. А. Ульянин, Закон Lambert'a и поляризация Arago. Казань. См. Wied. Ann., 62 (1897), 528, 537.

1900 г.

59. В. А. Анисимов, О высотах наибольшего освещения данных площадей. Изв. Варшавского Политехнич. ин-та, в. 1.

60. R. A. Негман, A treatise on geometrical optics, Cambridge.

1901 г.

61. J. Boussinesq, Théorie analytique de la chaleur. 1, Paris.

1902 г.

62. R. Straubel, Über einen allgemeinen Satz der geometrischen Optik und einige Anwendungen, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges., 4, 328.

1904 г.

63. А. А. Кузнецов, Электрические источники света, способы их исследования и применения, СПб. См. также [Л. 69].

1906 г.

64. В. Моnасch, Elektrische Beleuchtung, Hannover. См. Б. Моnаш, Электрическое освещение, с дополн. М. М. Богословского, СПб, 1910.

1907 г.

65. J. Herzog, C. Feldmann, Mittlere Licht- und Beleuchtungsstärken, ETZ, 28, 93.

66. E. P. Hyde, Geometrical theory of radiating surfaces with discussion of light tubes, BBS, 3, 81. См. Phys. Rev., 24, 249.

67. E. Liebenthal, Praktische Photometrie, Braunschweig.

68. A. A. Wohlauer, The uniform illumination of horizontal planes, EW, 50, 1207.

1908 г.

69. А. А. Кузнецов, Освещение городов дуговыми и пламенными лампами, Тр. I Съезда по вопр. освещения и нагревания, 30.
70. И. А. Рыпин, Дневной свет и расчеты освещенности помещений, СПб; см. также сб. Ин-та ниж. путей сообщ., в. 72.
71. U. Bordoni, Sul calcolo dell'illuminazione prodotta dalle superficie diffondenti, AAET, 12, 265. См. также AAET, 17, 554 (1913).
72. J. R. Cravath, V. R. Lansingh, The calculation of illumination by the flux of light method, LaL, 1, 1036.
73. A. E. Kenelly, A new method of determining the mean spherical intensity of lamp by the length of a straight line, when the curve of mean meridional intensity is given, EW, 51, 845.
74. W. S. Kilmer, A convenient method of drawing the Rousseau diagram, The IE, 3, 25.
75. A. S. McAllister, The absorption-of-light method of calculating illumination, EW, 52, 1128.
76. A. A. Wohlauer, The number of lamps for uniform illumination, EW, 51, 1376. См. также [Л. 77].
77. Его же, Rudiments of illuminating engineering, The IE, 3, 89.

1909 г.

78. E. W. Weinberg, Beleuchtungskörper für konstante Boden- und Raumbeleuchtung, ZB, 15, 1, 13, 25.
79. Его же, Beitrag zur Photometrirung linear Lichtquellen, ZB, 15, 305.
80. A. A. Wohlauer, Illuminometric calculations using rectangular co-ordinates, The IE, 2, 673; 3, 655.

1910 г.

81. Д. Дубровский, Испытание закона Ламберта, ЖРФХО, 42, 350.
82. P. Högnner, Methode zur Berechnung der Vertikalfächenbeleuchtung aus der Horizontalfächenbeleuchtung, ETZ, 31, 584.
83. B. Jones, On finite surface light sources, IE, 5, 281.
84. A. S. McAllister, Graphical solution of problems involving plane-surface lighting sources, EW, 56, 1356.
85. E. B. Rosa, Photometric units and nomenclature, BBS, 6, 543. См. IE, 5, 473.

1911 г.

86. L. Hönert, Der reduzierte Raumwinkel und die Lichtgüte von Fenstern, Kiel.
87. A. S. McAllister, The law of conservation as applied to illumination calculations, IE, 6, 703.
88. A. P. Trotter, Illumination its distribution and measurements, London.

1912 г.

89. F. Uppenborn, B. Monasch, Lehrbuch der Photometrie, zw. Aufg., Oldenburg.
90. L. Weber, Zur graphischen Darstellung eines in der Photometrie vorkommenden Integrales, ZB, 18, 289

1916 г.

91. Л. Дрейер, К вопросу о расчете освещения, Э, 37, 77.
92. N. A. Galbertsma, Lichttechnische Studien, Leipzig.
93. W. Harrison, E. Anderson, Illumination efficiencies as determined in an experimental room, IE, 11, 67.
94. L. Weber, Die Albedo des Luftplanktons, Ann. d. Phys., 51, 427.

1917 г.

95. M. Gerbel, Die Grundgesetze der Wärmestrahlung und ihre Anwendung auf Dampfkessel mit Innenfeuerung, Berlin.

1918 г.

96. J. Ondracek, Analyse achsial-symmetrischer Lichtquellen der Aussenbeleuchtung. EuM, 36, 77.

1919 г.

97. A. Burchard, Die natürliche Beleuchtung der Strasse, ZdB, 39, 38.
98. Его же, Die natürliche Beleuchtung der Hofes, ZdB, 39, 100, 597.
99. J. W. T. Walsh, Radiation from a perfectly diffusing circular disc, PPhS, 32, 59, 315.

1920 г.

100. B. A. Bartlett, On radiation from a cylindrical wall, Phil. Mag., 40, 111.
101. A. Burchard, Die Linien gleicher Leuchtwirkung auf ebenen Leuchtflächen, ZB, 26, 63. См. также [Л. 104].
102. I. W. Gross, Predetermining foot-candle illumination, EW, 75, 1423.
103. W. Harrison, E. A. Anderson, Coefficients of utilization, IE, 15, 67. См. [Л. 270].

1922 г.

104. A. Burchard, Die Stromlinien des Lichtes, ZB, 28, 28.

1923 г.

105. С. О. Майзель, Освещенность от больших поверхностей и применение их в фотометрии, ТГОИ, 3, в. 16, 12.
106. A. Burchard, Tageslichttechnisches, GI, 46, 149.
107. М. Планк, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, Leipzig. См. М. Планк, Теория теплового излучения, ОНТИ, 1935.

1924 г.

108. С. И. Вавилов, Пьер Бугер. Опыт о градации света, УФИ, 4, 215.
109. В. Л. Фок, Освещенность от поверхностей произвольной формы, ТГОИ, в. 28. См. Z. f. Phys., 28, 102; ЖРФХО, 56, 436.
110. Z. Yamauti, Geometrical calculation of illumination, REL, N 148.

1925 г.

111. F. A. Benford, Isocandles and the asymmetric lighting unit, GER, 28, 271. См. EW, 1353.

112. F. Hauser, Über die Grüne für die Erhaltung des Stäbchenapparates im Auge, Die Naturwissenschaften, 13, 197.

1926 г.

113. M. Cochu, Calcul rapide de l'éclairement moyen dans le cas d'appareils symétriques employés pour l'éclairage des rues, RGE, 20, 377. См. [Л. 270].

114. H. H. Higbie, A. Levin, Prediction of daylight from sloping windows, IE, 21, 273. См. [Л. 270].

115. J. Ondracek, Vorausberechnung der Beleuchtung durch natürliches Licht, L, 3, 93.

116. Z. Yamauti, The light flux distribution of system of inter-reflecting surfaces, JOSA, 13, 561. См. REL, N 190 (1927).

1927 г.

117. М. В. Соколов, К вопросу об электрическом освещении фабрик и заводов. Проблемы энергетики, сб. под ред. В. В. Дмитриева, Гос. изд-во.

118. H. Buckley, On the radiation from the inside of a circular cylinder, Phil. Mag., 4, 753; 6 (1928), 447; 17 (1934), 576.

119. M. Cochu, J. Dourgnon, Le coefficient d'utilisation d'un espace clos et sa prédétermination dans les projets d'éclairage, RGE, 31, 531.

120. Ch. Fabry, Introduction général à la photométrie, Paris. См. Ш. Фабри. Общее введение в фотометрию, ГТТИ, 1934.

121. K. S. Weaver, Use of Rousseau diagram for the calculation of light flux distribution, IE, 22, 547.

122. Z. Yamauti, Further study of geometrical calculation of illumination due to light from luminous sources of simple form, REL, N 194.

1928 г.

123. Е. С. Балакшина, Дневное освещение промышленных зданий, Вестн. сибирских инж., 8, № 3—4, 23; № 5—6, 1.

124. А. А. Гершун, Световое поле от поверхностных излучателей равномерной и неравномерной яркости, ТГОИ, в. 38, 10.

125. А. А. Гершун, М. М. Гуревич, Световое поле, ЖРФХО, 60, 355.

126. П. М. Тиходезь, Расчет освещения по силе света, Расчет освещения по световому потоку. Справочная книга для электротехников под ред. М. А. Шателена, В. Ф. Миткевича и В. А. Толвинского, 3, 128, 136, КУБУЧ.

127. A. Blondel, Sur le principe de la conservation du flux en photométrie, Lux, 1, 127.

128. H. Buckley, Some problems of interreflection, PICI, 888.

129. J. Dourgnon, Nouvelle méthode de prédétermination des coefficients d'utilisation dans les projets d'éclairage d'espaces clos, RGE, 23, 271. См. [Л. 270], а также [Л. 214].

130. W. Margoulis, Etude nomographique pour la détermination des coefficients d'utilisation dans de projets d'éclairage, RGE, 24, 439.

131. E. L. J. Matthews, Un nouveau diagramme polaire du flux lumineux, RGE, 24, 265. См. также [Л. 183].

132. G. I. Pokrowski, Über die Ursachen, welche die Lichtempfindlichkeit des Auges als Funktion der Wellenlänge des Lichtes bestimmen, Phys. Zeitschr., 29, 269.

133. O. Seibert, Die Wärmeaufnahme des bestrahlten Kesselheizfläche, AWD, 9, 180.

134. W. Selenkoff, Die Lichttechnik auf der Leningrader electrotechnischen Konferenz 1928, Licht und Lampe, 17, 721.

135. Z. Yamauti, Point-to-point methods of determining zonal flux, PICI, 409.

1929 г.

136. А. А. Гершун, Расчет естественного освещения, ТГОИ, 44, 25.

137. P. Clausung, The amount of uniformly-diffused light that will pass through two apertures in series, Phil. Mag., 8, 126.

138. J. Dourgnon, P. Waguët, Les diffuseurs de lumière, RGE, 25, 435.

139. Их же, Procédé de calcul des éclairagements produits par de sources non ponctuelles rayonnants suivant la loi de Lambert et de brillance constante, CR, 189, 361.

140. A. Gerschun, Uniformly-diffused light through two apertures, Phil. Mag., 7, 419.

141. E. L. Milne, Note on a geometrical radiation problem, Phil. Mag., 7, 273.

142. E. Schoenberg, Theoretische Photometrie, Handbuch der Astrophysik, 2/1, 1, Berlin.

143. J. W. T. Walsh, Note on a geometrical radiation problem, Phil. Mag., 7, 1092.

144. Его же, Uniformly diffused light through two apertures, Phil. Mag., 7, 1093.

145. C. E. Wright, Geometrical radiation theorem, Phil. Mag., 7, 946.

146. Z. Yamauti, Light flux reaching a rectangular area from a rectangular aperture, REL, № 250.

1930 г.

147. Л. К. Рамзин, Лучеиспускание в котельных установках, Изв. Всесоюзн. теплотехнич. ин-та, № 4, 3.

148. H. C. Hottel, Radiant heat transmission, Mech. Eng, 52, 699.

149. M. Planck, Einführung in die Theorie der Wärme, Leipzig. См. М. Планк, Теория теплоты, ОНТИ, 1935.

1931 г.

150. А. А. Гершун, Характеристики условий освещения, ТГОИ, 6, в. 59, 9.

151. Р. А. Сапожников, О способе графического представления распределения света точечных источников, Тр. II ВСК, в. 4, 63.

152. Его же, Аналитический расчет коэффициентов использования для внутреннего освещения, Тр. II ВСК, в. 5, 11.

153. Г. К. Устюгов, Об одном графическом способе расчета светового потока, ТГОИ, в. 59, 31.

154. W. Arndt, Raumbeleuchtungstechnik, Berlin. См. [Л. 192].

155. J. Dougnon, P. Waguët, Propriétés photométriques des surfaces diffusantes regulateuses, CR, 192, 406.

156. V. Genkin, Calcul de l'éclairage moyen en présence du surface diffusantes de brillance uniforme, RGE, 29, 369.

157. E. L. J. Matthews, Beitrag zur Theorie der linearen Lichtquellen und seine Anwendung auf die Beleuchtung mit Soffittenlampen, Licht, 1, 141 и 165.

158. J. Ondraček, Graphische Ermittlung der von grossflächigen Lichtquellen hervorgerufenen Beleuchtung, L, 8, 49.

159. A. C. Stevenson, On the mathematical and graphical determination of direct daylight factors, ПИС, 2, 1167.

1932 г.

160. А. А. Гершун, Расчет освещенности от светящейся полосы, С, № 8—9, 26.

161. Н. Н. Костромитин, Электрическое хозяйство портов, Ленгострансиздат.

162. В. В. Мешков, Точечный метод расчета прожекторного освещения, сб. «Расчет прожекторного освещения», ГЭИ.

163. В. В. Новиков, Графический прием построения продольной кривой силы света по заданной кривой светового потока, С, № 10, 16.

164. С. В. Шиманский, Ускоренные методы расчета прожекторного освещения, С, № 10, 9.

165. J. Dougnon, L'Eclairage, Comptes rendus du congr. internat. d'électricité, 8, 99.

166. A. Gouffé, Calcul de l'éclairage moyen des espaces circulaires et elliptiques, ПИС, 1, 544.

167. W. H. McAdams, Heat transmission. См. В. Х. Макадамс, Теплопередача, Металлургиздат, 1961.

168. J. W. Ryde, B. S. Cooper, The theory of the diffusion of light by opal glasses, ПИС, 1, 387.

169. Z. Yamauti, Theory of field of illumination, REL, N 339.

1933 г.

170. Н. Г. Болдырев, Аналитическое обоснование метода А. М. Данилюка и описание транспорта А. А. Гершуна для расчета естественного освещения, Тр. I Всесоюзн. конф. по естеств. освещ., в. 3, 68.

171. Б. П. Вейнберг, Черты сходства задач и методов гелиофототехники и гелиотехники, там же, 170.

172. Н. М. Грюнер, Логарифмические номограммы для определения точечным методом освещенности на горизонтальной поверхности, ТСС, в. 1, 42.

173. И. С. Дубинкин, Таблица для расчета общего освещения, ТСС, в. 1, 64.

174. Р. А. Сапожников, Критический разбор существующих приемов расчета внутреннего электрического освещения, ТСС, в. 1, 21.

175. Е го ж е, К вопросу об учете действия удаленных ламп и отражающих поверхностей в проектировании внутреннего освещения, ТСС, в. 1, 55.

176. J. Dourgnon, Definition et calcul des grandeurs caractéristiques de l'éclairage d'un espace clos, RGE, 33, 579.

177. Ch. Fabry, Remarques sur les définitions et les unités relatives aux rayonnements employés en thérapeutique, Rev. d'Opt., 12, 465.

178. H. J. Helwig, Zur Lichtstrombestimmung ausser Lichtstärkenverteilung, Licht, 3, 243; 4, 80 (1934).

179. K. Hisano, Graphical methods for the calculation of illumination due to surface source, REL, № 353.

180. H. C. Hottel, J. D. Keller, Effect of reradiation on heat transmission in furnaces and through openings, Trans. Am. Soc. Mech. Engrs. Iron and Steel, 55, N 15, 39.

181. R. Nampon, Méthodes graphiques pour le tracé de courbes d'égal éclairairement, RGE, 34, 791.

182. K. Norden, Die Grundlagen der Schattentechnik, Berlin.

183. E. S. Oberndorf, Polar intensity curves can give total flux, EW, 101, 132.

184. J. Ondracek, Zur Vorausberechnung von Beleuchtungsanlagen, L, 10, 25.

185. R. C. Putnam, Grafical illumination computation, GER, 36, 589.

186. A. Vallat, Détermination de quelques profils de surfaces diffusantes de brillance constante, Lux, 6, 6.

187. Z. Yamauti, Recherche d'un radiateur intégral au moyen d'un corps cylindrique, Com. Internat. Poids et Mesures, Procès. verbaux, 16, 243.

1934 г.

188. Л. Д. Белькинд, Электрические осветительные приборы ближнего действия, ГЭИ.

189. П. Г. Болдырев, Расчет осветительных арматур из молочного стекла, С, № 5, 3.

190. А. С. Невский, Исследование теплообмена излучением между двумя произвольными непрозрачными поверхностями, ЖТФ, 4, 1482.

191. Е. С. Ратнер, Номографический метод расчета освещения от больших светящихся поверхностей, Бюлл. Всесоюзн. электротехнич. ин-та, № 10, 38. См. [Л. 270].

192. Л. И. Сиротинский, Б. Ф. Федоров, Основы техники электрического освещения, ГЭИ.

193. А. А. Труханов, Расчет местного освещения, СЛИОТ, кн. 2, 221.

194. G. Canesi, A.-C. Ramelli, Architetture luminose, Hoepli.

195. K. Fränzz, Zur exakten Berechnung von Beleuchtungsstärken, Licht, 4, 17.

196. H. H. Higbie, Lighting calculations, N. Y.

197. K. Hisano, Graphical methode for the calculation of light flux incident to illuminated plane from surface source, REL, N 367.

198. A. Marsat, Un nouveau mode de figuration des courbes isobougies, Lux, 7, 108.

199. Z. Yamauti, On the blackness of cylindrical black body, REL, N 378.

1935 г.

200. Н. Г. Болдырев, О распределении яркости по небу, С, № 6, 16.

201. Его же, О расчете освещенности от большого числа светильников, СЛИОТ, кп. 2, 210.

202. С. И. Вавилов, Фотометрический метод гашения и его применение, «Природа», 24, № 12, 9.

203. В. Б. Вейнберг, К методике оценки влияния окраски помещения на его естественное освещение, Тр. Всесоюзн. Электротехнич. Ассоч., 4, 28.

204. А. А. Гершун, Фотометрическая терминология, Справочник по осветительной технике под ред. Л. Д. Белькинда, 537, ОНТИ.

205. И. С. Дубинкин, Новый метод вычисления коэффициентов использования, ТСС, в. 3, 13.

206. Г. М. Киорринг, Расчет освещенности от несимметричных светильников при помощи относительных изолюкс, С, № 10, 9.

207. Г. Л. Поляк, Анализ теплообмена излучением между диффузными поверхностями методом сальдо, ЖТФ, 5, 436.

208. Его же, Алгебра однородных потоков, Изв. Энергетич. ин-та им. Г. М. Кржижановского, 3, 53.

209. Р. А. Сапожников, Пространственные изолюксы, ТСС, в. 3, 6.

210. Б. Н. Трубников, Расчет освещенности от светящихся полос и световых трубок равномерной яркости, С, № 8, 9.

211. Г. К. Устюгов, И. Д. Райский, Светотехника на воздушном транспорте, ОНТИ.

212. Е. Н. Яковлев, Расчет освещения от больших светящихся поверхностей, С, № 7, 1.

213. J. G. Davey, The evolution of the sinusoidal diagram and horizontal illumination charts, LaL, 28, 18.

214. J. Dourgnon, Définitions et propriétés de différentes grandeurs intervenant dans le réflexion de la lumière, RGE, 37, 819.

215. E. Eckert, Das Strahlungsverhältnis von Flächen mit Einbuchungen und von zylindrischen Bohrungen, AWD, 16, 135.

216. A. Vallat, Étude sur les surfaces mates lumineuses des brillance uniforme, L'Électricien, 66, 171. См. также [Л. 186].

1936 г.

217. А. А. Гершун, Световое поле, ОНТИ, См. A. Gershun, The light field, JMRPh, 18 (1939), 51 и [Л. 320].

218. Его же, Основные представления теории светового поля, Изв. АН СССР. Отд. математич. и естеств. наук, Сер. физич., 417.

219. Б. А. Гольдштейн, Расчет освещенности от больших светящихся поверхностей произвольной конфигурации, С, 40.

220. М. М. Гуревич, Изменение яркости пучка лучей при преломлении, ДАН, 4, 47.

221. Г. М. Киорринг, Некоторые вопросы теории наимыгоднейшего расположения светильников, ТСС, в. 4, 25.

222. И. А. Лепский, Расчет освещенности от осветительных приборов с несимметричным светораспределением, С, 138.

223. П. М. Тиходеев, Световые измерения в светотехнике, ОНТИ. Изд. 2-е, ГЭИ, 1962.

224. K. Hisano, Light flux distribution in a rectangular parallelepiped and its simplifying scale, REL, N 394. См. IE, 41 (1946), 232.

1937 г.

225. Р. А. Сапожников, О расчете многократного отражения света, С, 5, 202 и 284.

226. П. М. Тиходеев, Электрическое освещение, Ленингр. индустр. ин-т.

227. A. A. Geršun, Notion du champ lumineux et son application à la photométrie, RGE, 42, 5. См. CRCAE, 154.

228. Его же, La méthode vectorielle dans les calculs photométrique, RGE, 42, 9. См. CRCAE, 157.

229. J. Ondravec, A. Gouffés, Méthodes graphiques de détermination des éclairagements des produits par surfaces lumineuses, RGE, 41, 811.

230. Z. Yamauti, Etude analitique des «interréflexions» dans un cylindre de longueur infinie, CRCAE, 144.

1938 г.

231. В. Бляшке, Лекции по интегральной геометрии, «Успехи матем. наук», в. 5, 97.

232. Н. Г. Болдырев, Теоретическая фотометрия, Ленингр. ин-т охраны труда.

233. А. А. Гершун, Соображения по докладу проф. С. О. Майзеля в его части «Проект системы определений основных световых величин», СТС, 29.

234. Его же, Фотометрический инвариант, ДАН, 18, 31. См. [Л. 320].

235. С. О. Майзель, К вопросу об определении основных понятий фотометрии и светотехники, СТС, 9.

236. П. И. Хорошилов, Расчет светового потока от прямоугольника на прямоугольник, С, 6, 43.

237. A. A. Geršun, Sur une theorie du champ lumineux, RGE, 44, 307.

1939 г.

238. М. М. Гуревич, Цветовое пространство и световой вектор, ЖТФ, 9, 1414.

239. J. Dougnon, Remarques sur l'usage pratique de la photométrie vectorielle, RGE, 45, 437.

240. Его же, Remarques au sujet de certaines grandeurs intervenant en photométrie vectorielle, Internat. Commiss. on Illum., 1b Rep., 9.

241. Internat. Commiss. on Illum., Comité d'études sur la classification des luminaires, 22 в Rep.

242. P. Moon, Basic principles in illumination calculations, JOSA, 29, 108.

243. W. F. Whitmore, Interreflections inside on infinite cylinder, JMPH, 17, 218.

1940 г.

244. Р. А. Сапожников, Энергетическое определение спектральной чувствительности приемников радиации, Изв. Ленингр. электротехнич. ин-та им. В. И. Ульянова (Ленина), в. 22, 66.
245. F. Benford, Illumination from extended sources computed by the theory of the integrating sphere, JOSA, 30, 33.
246. В. Монош, The cylindrical web for isocandles IE, 35, 374.
247. Р. Моон, On interreflections, JOSA, 30, 195.

1941 г.

248. А. А. Гершун, Мера множества лучей, ТГОИ, 14, в. 112—120, 239.
249. А. М. Данилюк, Расчет естественного освещения, Стройиздат. См. также [Л. 170].
250. Т. Т. Усенко, Расчет лучистого теплообмена по Поляку, в кн. «Котельные установки» под ред. М. В. Кирпичева, З. И. Ромма и Т. Т. Усенко, 1, 120. ГЭИ.
251. J. v. Hulsen, Een weinig bekende methode voor het aangeven van verlichtingssterken, Electrotechnick, 19, 130.
252. Р. Моон, Interreflections in finite cylinders, JOSA, 31, 223.
253. Е го же, Interreflections in lightwells, JOSA, 31, 301.
254. Е го же, Interreflections in rooms, JOSA, 31, 374.
255. W. T. White, Calculation of the light distribution in lightwells, JOSA, 31, 308.

1942 г.

256. Р. Моон, System of photometric concepts, JOSA, 32, 348.
257. Р. Моон, D. E. Spencer, Illumination from a non-uniform sky, IE, 37, 707. См. также [Л. 266].
258. D. E. Spencer, Calculation of illumination from triangular sources, JOSA, 32, 274.
259. Е е же, Exact and approximate formulae for illumination from troffers, IE, 37, 596.
260. Е е же, Illumination from arroys of rectangular sources, JOSA, 32, 539.

1943 г.

261. С. И. Вавилов, Галилей в истории оптики, сб. «Галилео Галилей», 5, Изд-во АН СССР. См. УФН, 83, 583.
262. Р. Моон, New methods of calculating illumination, JOSA, 33, 115.

1944 г.

263. В. В. Соболев, Точечный источник света между параллельными плоскостями, ДАН, 42, 176.
264. Р. Моон, D. E. Spencer, Brightness and helios, IE, 39, 507.

1945 г.

265. Л. Д. Белькинд, Электроосветительные приборы ближнего действия, ГЭИ.

1946 г.

266. P. Moon, D. E. Spencer, Light distribution from rectangular sources, JFI, 241, 195.
267. Их же, Light distribution in rooms, JFI, 242, 111.
268. Их же, Lighting design by interreflection method, JFI, 242, 465.

1947 г.

269. А. А. Гершун, Теория светового поля, Э, № 10, 5.
270. В. В. Мешков, Осветительные установки, ГЭИ.
271. M. Cochu, Calcul des éclairagements dus à des rangées de sources diffusantes de forme rectangulaire ou carrée, RGE, 56, 167.

1948 г.

272. С. Г. Юров, Два метода определения освещенности от больших поверхностей, ЖТФ, 18, 1073.
273. P. Moon, D. E. Spencer, Lighting design, Combridge, Mass.

1949 г.

274. С. О. Майзель, Теоретические основы фотометрии, ИТП, 1274.
275. M. Cochu, Rayonnement, photométrie et éclairage, Paris.
276. J. Dougnon, R. Cadiergues, Sur l'application de l'équation de Fredholm à l'étude des problèmes d'éclairage et de chauffage, RGE, 58, 229.
277. T. Iijima, Theory of inter-reflection between two infinite parallel planes, JSR, N 1, 9.

1950 г.

278. П. Бугер, Оптический трактат о градации света, перев. под ред., со статьями и комментариями А. А. Гершуна, Изд-во АН СССР.
279. С. И. Вавилов, Глаз и Солнце. См. Собр. соч., 4 (1956), Изд-во АН СССР.
280. Ю. А. Суринов, К решению задачи о лучистом обмене в системах серых тел, ИТП, 1345.
281. P. Moon, D. E. Spencer, Interreflections in coupled enclosures, JEI, 250, 151.

1951 г.

282. М. В. Кирпичев, Метод поточной алгебры впервые разработан, опубликован и нашел практическое применение в Советском Союзе, ИТП, 636.
283. Г. М. Кнорринг, Расчет освещения от светящихся линий, Э, № 4, 57.
284. G. Bethe, Über die Beleuchtung durch strahlende Flächen, Optik, 8, 476, 489.
285. R. G. McPhail, A method of calculating direct illumination from linear sources, IE, 46, 511.
286. P. Moon, D. E. Spencer, Simplified interreflection calculations, JFI, 251, 215.

287. Их же, Interference calculations for various luminaires, JFI, 252, 11.

288. H. Zijl, Manual for the illuminating engineer on large size perfect diffusors, Eindhoven.

1952 г.

289. А. А. Гершун, О спектральной плотности излучения, УФН, 46, 388. См. [Л. 320].

290. М. М. Епанешников, Расчет люминесцентного освещения общественных и административных помещений, Э. № 3, 64.

291. F.-V. Caracciolo, Contributo allo studio fotometrico della lampade fluorescenti, E, 39, 239.

1953 г.

292. Д. Н. Лазарев, А. А. Гершун, Э, № 6, 91.

293. R. Cadiergues, Physique et géométrie des échanges rayonnement, Chaleur et Industrie, 33, 395; 34 (1954), 17 и 43.

294. F.-V. Caracciolo, Sorgenti luminose curvilinee, E, 40, 104.

295. P. Moon, D. E. Spencer, Theory of photic field, JFI, 255, 33.

296. Их же, Some application of photic field theory, JFI, 255, 113.

1954 г.

297. М. М. Епанешников, Расчет мощности установок архитектурного освещения, Э, № 11, 68.

298. R. Hopkinson, J. Longmore, P. Petherbrige, An empirical formula for the computation of the indirect component of daylight factor, TIES, 19, 201.

1955 г.

299. R. Croft, Surface distribution factors and the interreflection method, TIES, 20, 259.

300. R. G. Hopkinson, The indirect component of illumination in artificially-lit interiors, LaL, 48, 315. См. [184].

301. J. A. Jacquez, H. F. Kurrenheim, Theory of the integrating sphere, JOSA, 45, 460. См. также [Л. 397].

302. P. F. O'Brien, Interreflections in rooms by a network method, JOSA, 45, 419. См. [Л. 330].

303. R. S. Wiseman, Brightness and illumination by interreflections in enclosures, IE, 50, 227.

1956 г.

304. P. F. O'Brien, Network representation of the integrating sphere, JOSA, 46, 343.

305. A. K. Oppenheim, C. Berkeley, Radiation analysis by the network methods, Trans. Am. Soc. Mech. Engrs, 78, 725.

306. R. O. Philips, Direct flux, inter-reflections, and final luminances in rectangular rooms, TIES, 21, 75.

1957 г.

307. М. С. Дадномов, Выбор расположения прожекторов при освещении больших открытых пространств, С, № 4, 6.

308. М. М. Епанешников, Оптимальные кривые силы света светильников для освещения промышленных предприятий, С, № 12, 12.

308. Комитет технической терминологии АН СССР, Терминология светотехники, Сборники рекомендуемых терминов, в. 48, Изд-во АН СССР. См. С, № 5, 1; № 7, 1.

309. В. В. Мешков, Основы светотехники, 1, ГЭИ.

310. С. Codegone, Sur la prédétermination des éclairagements et des luminances, RGE, 66, 635.

311. J. Dougnon, Le problème des réflexions mutuelles en éclairage, Bull. Soc. Franç. Électr., 7, 226.

312. М. Jakob, Heat transfer, London. См. М. Якоб, Вопросы теплопередачи, ИЛ, 1960.

313. J. R. Jones, J. J. Neidhard, Algebraic interreflectance computations, IE, 52, 199.

314. А. Kollmar, W. Liese, Die Strahlungsheizung, München. См. также [Л. 167].

315. P. Moon, D. E. Spencer, Errors in the solution of integral equations, JFI, 264, 29.

316. D. Smith, A method of calculating flux from an isocandle diagram using a system discrete points, TIES, 22, 105.

317. D. E. Spencer, The effect of furniture on coefficient of utilization, IE, 52, 35.

318. J. W. T. Walsh, Sector flux from South Africa, LaL, 50, 153.

319. R. S. Wiseman, Analysis of experimental data for interreflectance theory, IE, 52, 43.

1958 г.

320. А. А. Гершун, Избранные труды по фотометрии и светотехнике, ГИТТЛ.

321. В. F. Jones, J. R. Jones, A versatile method of calculating illumination and brightness, IE, 53, 467; 54 (1959), 113.

322. P. F. O'Brien, Interreflections in asymmetrical rooms, IE, 53, 131.

323. D. E. Spencer, Approximations and the interreflection method, IE, 53, 243.

1959 г.

324. В. Н. Андрианов, Применение метода электроанalogии к решению задач лучистого теплообмена, Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, № 1, 20.

325. Н. Г. Болдырев, В. И. Кузнецов, Поглощение и рассеяние света, С, № 9, 14.

326. М. С. Дадимов, Расчет оптимальных и эффективных кривых силы света светильников, С, № 12, 9.

327. М. М. Епанешников, Расчет осветительных установок с учетом многократных отражений, С, № 1, 3.

328. Е го же, Расчет коэффициента использования светового потока осветительной установки, С, № 4, 7. См. также [Л. 339].

329. Е го же, Расчет средней светности потолка и стен при проектировании осветительной установки, С, № 12, 5. См. также [Л. 351].

330. Вопросы светотехники за рубежом, сб. под ред. В. В. Мешкова, ГЭИ.

331. Р. А. Сапожников, Письмо в редакцию, С, № 8, 31.

332. С. Н. Шорин, Г. Л. Поляк, И. П. Колченогова, В. Н. Андрианов, Световое моделирование лучистого теплообмена, сб. «Теплопередача и тепловое моделирование» под ред. М. А. Михеева, 365, Изд-во АН СССР.

333. R. Croft, Average illumination on the vertical and calculation of zonal multipliers for continuous distributions, MIES, N 2.

334. J. A. Lynes, Inter-reflection and flux distribution in lighted interiors, MIES, N 1.

335. P. F. O'Brien, J. L. Howard, Predetermination of luminances by finite difference equations, IE, 54, 209.

336. B. Steck, Ein numerische Verfahren zur Bestimmung des Lichtstromes von Leuchtstofflampen mit Reflexschicht und von Leuchtstofflampen-Leuchten, Lichttechnik, 11, 269.

1960 г.

337. А. В. Бредняков, Р. И. Эльман, Метод решения некоторых светотехнических задач с помощью электронных моделей, С, № 6, 1.

338. С. П. Детков, К проблеме лучистого теплообмена между серыми поверхностями, ЖТФ, 30, 96.

339. М. М. Епанешников, Универсальные таблицы для расчета коэффициента использования осветительной установки, С, № 7, 16.

340. М. М. Епанешников, Г. Н. Ундасынов, Расчет осветительных установок на электрических моделях, С, № 8, 3. См. также [Л. 364].

341. Г. Л. Поляк, Лучистый теплообмен тел с произвольными индикатрисами отражения поверхностей, сб. «Конвективный и лучистый теплообмен» под ред. М. А. Михеева, 118, Изд-во АН СССР.

342. Р. А. Сапожников, К вопросу о проектировании прожекторного освещения, С, № 2, 1. См. также С, № 2 (1961), 28.

343. Е го же, О спектральном распределении лучистой энергии, УФН, 70, 387. См. Sov. Phys. Usp., 3, 172.

344. Е го же, Теоретическая фотометрия. Основы расчета освещения, ГЭИ.

345. С. И. Шевцов, Лучистый теплообмен в незамкнутой полости, Тр. Моск. технологич. ин-та пищевой пром., в. 15, 182.

346. P. F. O'Brien, Lighting calculations for thirty-five thousand rooms, IE, 55, 215.

347. J. Roch, Die Beleuchtungsstärke-Berechnung bei kreisförmigen Lichtbändern, Lichttechnik, 12, 616.

1961 г.

348. Л. А. Вулис, А. А. Гурвич, В. Г. Клиnger, Световое моделирование лучистого теплообмена в топках, «Теплоэнергетика», № 2, 67.

349. Н. Г. Гусев, Е. Е. Ковалев, Д. П. Осипов, В. И. Попов, Защита от излучения протяженных источников, Госатомиздат.

350. С. П. Детков, Некоторые задачи расчета освещенности от осесимметричных излучателей, С, № 7, 23.

351. М. М. Епанешников, Универсальные таблицы для расчета средней светности стен и потолка помещения, С, № 9, 20.

352. Б. И. Степанов, Основы спектроскопии отрицательных световых потоков, изд-во Белгосуниверситета им. В. И. Ленина.

353. H. E. Bellchambers, G. K. Lambert, H. R. Ruff, Modern aids to lighting design-computer techniques, TIES, 26, 107.

354. H. E. Bellchambers, P. Petherbridge, R. O. Phillips, Nomenclature and symbols associated with radiation transfer calculations, TIES, 26, 136.

355. Р. Моон, The scientific basis of illuminating engineering, New York.

1962 г.

356. А. А. Волькенштейн и др., Андрей Александрович Гершун, С, № 12, 1.

357. Р. А. Сапожников, О необходимости единой терминологии в теории переноса излучения, С, № 12, 16.

358. Его же, Спектральные характеристики излучения, С, № 10, 1.

359. Б. И. Степанов, Отражение и пропускание света плоско-параллельными слоями с отрицательным коэффициентом поглощения, «Оптика и спектроскопия», 12, 440.

360. E. Wittig, Berechnung der Zonenlichtströme in Kreis-symmetrischen Raumwinkel aus Buchblattkurven, Lichttechnik, 14, 392.

1963 г.

361. Н. И. Васильев, Представяне на светлоразпределителните криви на осветлителните арматури чрез тригонометрични редове на Фурие, Годишник Машинно-електротехнически ин-т, 13, кн. 2, 219, София.

362. М. М. Гуторов, Средняя цилиндрическая освещенность, С, № 10, 10.

363. С. П. Детков, К учету многократных отражений, С, № 11, 25. См. также [Л. 338].

364. М. М. Епанешников, Электрические модели для расчета осветительных установок, С, № 12, 1.

365. Р. Киттлер, Ш. Ондричка, Уточненный способ расчета естественного освещения, Изв. Ак. строит-ва и архитектуры СССР, № 1, 93.

366. Р. А. Сапожников, К вопросу о расчете освещенности от равномерного прямоугольника, С, № 10, 13.

367. R. C. Jones, Information capacity of sensors of heat and light, в кн. «Light and heat sensing», ed. by H. J. Merrill, 3, Oxford.

368. R. Kittler, J. Tino, Einstrahlzahlen bei der Flächenstrahlung in einem rechtwinkligen Raum, GI, 84, 15.

369. J. Konijn, B. Tollander, Solid angle computations for a circular radiator and a circular detector. Aktiebolaget atomenergi, N 101.

370. P. Meaker, Lambert's cosine law of incidence, IE, 58, 475.

371. P. F. O'Brien, Pleijel's gloscope for lighting design, IE, 58, 131. См. также [Л. 386].

1964 г.

372. Н. В. Волоцкой, Г. М. Кнорринг, М. С. Рябов, А. С. Шайкевич, Электрическое освещение производственных и гражданских зданий, «Энергия».

373. М. М. Гуревич, Освещенность площадки, сильно наклоненной к оси светящегося диска, С, № 3, 9. См. также [Л. 374].

374. Его же, Освещенность площадки, сильно наклоненной к оси светящегося диска, «Опт.-мех. пром.», № 4, 30.

375. М. М. Гуроров, Полуцилиндрическая освещенность, С, № 11, 11.

376. С. П. Детков, Зональный расчет лучистого теплообмена с применением электронно-цифровых машин, «Теплофизика выс. температур», 2, 82.

377. Ю. Н. Любитов, Расчет взаимодействия молекулярных потоков с ограждающими их сосудами, «Наука».

378. В. К. Полянский, В. П. Рвачев, Л. В. Ковальский, Приставка к спектрографу для быстрого определения спектральных характеристик приемников и источников излучения и для абсорбционного анализа. Журн. прикл. спектроскопии, 1, 225.

379. Р. А. Сапожников, О применении понятий энтропии, информации и пегэнтропии, Сб. тр. Ленингр. механич. ин-та, № 41, «Техническая кибернетика», 4.

380. Его же, Спектральная чувствительность и спектры, С, № 3, 7.

381. F. Gaume, Obtention d'un éclairage très uniforme sur une portion de plan au moyen de tubes luminescents longs ou de sources lumineuses convenablement disposées, Lux, 37, 113.

382. J. R. Jones, Three-surface analog computer an aid in point-by-point calculations in interiors, IE, 59, 357.

383. J. R. Jones, B. F. Jones, Using the Zonal Cavity System in lighting calculations, IE, 59, 413, 448, 501, 556.

384. R. Kittler, Š. Ondrejčka, Stanovenie oblohovej zložky súčiniteľa dennej osvetlenosti pre vertikálne obdĺžnikové otvory, Stavebn. časop., 12, 261.

385. Y. Kurioka, Accuracy and precision of different kinds of methods for total flux integration, JIEIJ, 48, 436.

386. P. J. Peters, Development of a prediction technique for daylighting design, LaL, 57, 186.

387. D. E. Spencer, Tensors in illuminating engineering, IE, 59, 345.

388. B. Steck, Ein Berechnungsverfahren für Lichtbänder, angewandt auf eine Anordnung mit stark gerichtetem Licht, Lichttechnik, 16, 266.

1965 г.

389. А. А. Волькенштейн, Визуальная фотометрия малых яркостей, «Энергия».

390. А. Я. Коц, Расчет светящего потолка с экранирующими решетками, С, № 2, 26.

391. Р. А. Сапожников, Е. Д. Соломенцев, Световое поле излучающих поверхностей, не подчиняющихся закону Ламберта С, № 11, 1.

392. C. Benz, O. Reeb, H.-G. Wagner, Zur analytischen Darstellung von Lichtstärkeverteilungskurven, *Lichttechnik*, 17, 150A.

393. S. Hesse, Verfahren zur Berechnung der Beleuchtungsstärke unter Leuchtenreihen, *Lichttechnik*, 17, 18A.

394. L. Кперро, М. Чалупка, Vektorové riešenie svetelného pol'a, *Elektrotechn. časop.*, 16, 574.

395. P. F. O'Brien, Numerical analysis for lighting design, *IE*, 60, 169.

396. P. J. Richetta, Theory of absorption on scattering within integrating spheres, *JOSA*, 55, 21.

397. F. Sartel, Note sur l'évaluation de la précision de la mesure des flux lumineux en sphère intégratrice, *Rev. E*, 4, 419.

398. K. Stolzenberg, Die Bestimmung des indirekten Anteils der Lichtströme in der Innenbeleuchtung unter Berücksichtigung der Selektivität der reflektierenden Flächen, *Lichttechnik*, 17, 95A.

399. Еро же, Ein Streifenverfahren zur Berechnung des Direktlichtstroms von Leuchten für Leuchtstofflampen in der Innenraumbeleuchtung, *Lichttechnik*, 17, 21A; 38A.

400. O. Teramura, On the theory of calculation of mean illuminance, *JIEIJ*, 49, 288.

401. J. W. T. Walsh, *Photometry*, 3rd ed., New York.

1966 г.

402. Р. А. Сапожников, Ю. А. Летучий, Динамика линейных призмиков излучения, *С*, № 10, 1.

403. Р. А. Сапожников, Е. Д. Соломенцев, Квазипотенциалы светового поля круга, излучающего по закону Ламберта, *ДАН*, 170, 1062.

404. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, изд. 8-е, «Наука».

405. J. Demathieu, Représentation des courbes d'intensité lumineuse des appareils d'éclairage, *Lux*, N 36, 37.

406. H.-J. Helwig, J. Krochmann, R. Schöld, Darstellung von Lichtstärkeverteilungskurven durch Fourierreihen und weitergehende Anwendungen, *Lichttechnik*, 18, 73A.

407. C. Clerici, *Illuminotecnica. Principi di fotometria*, Milano. См. также [Л. 185].

408. Р. Кроссава и др., Руководство к освещению (на японском).

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН

- Абель, Н. Г. (N. H. Abel) 108
Альберти, Л.-Б. (L.-B. Alberti) 5, 9
Андерсон, И. (E. Anderson) 104, 228
Беер, А. (A. Beer) 198
Белькинд, Л. Д. 4
Бенфорд, Ф. (F. Benford) 120
Блондель, А. (A. Blondel) 75, 103
Болдырев, Н. Г. 15, 104, 142, 192, 193
Бордони, А. М. (A. M. Bordoni) 88
Бордони, У. (U. Bordoni) 178
Бугёр, П. (P. Bouguer) 6, 45—48, 66, 97, 103, 169
Бурместер, Л. (L. Burmester) 75
Бурхард, А. (A. Burchard) 71, 187
Вавилов, С. И. 6, 40
Вебер, Л. (L. Weber) 51, 100
Винер, Х. (Ch. Wiener) 173, 176, 201
Винчи, Л. да (L. da Vinci) 6, 7, 44
Галилей, Г. (G. Galilei) 6
Гаррисон, У. (W. Harrison) 104, 228
Гаусс, К. Ф. (K. F. Gauss) 77
Герман, Р. А. (R. A. Herman) 75, 176, 178, 188
Гершель, Дж. (J. Herschel) 66
Гершун, А. А. 12, 17, 24, 47, 49, 76, 135, 173, 200, 218
Гольдштейн, Б. А. 174
Гуревич, М. М. 4, 76
Данилюк, А. М. 178
Детков, С. П. 202
Дубинкин, И. С. 184
Дурньон, Ж. (J. Dourgnon) 67, 68, 220, 227, 228, 233
Д'Эгильон, Ф. (F. D'Aiguillon) 6
Жуковский, Н. Е. 202
Зеленков, В. А. 51
Каган, В. К. 4
Карстен, В. И. (W. J. Karsten) 6
Кеплер, И. (J. Kepler) 6, 44
Клаузинг, П. (P. Clausing) 240
Клаузиус, Р. (R. Clausius) 50
Кнорринг, Г. М. 149
Кокс, Г. (H. Cox) 171
Кононович, А. К. 6
Крофтон, М. В. (M. W. Crofton) 211, 238
Купер, Б. С. (B. S. Cooper) 236
Куприянов, Д. А. 116
Курдваповский, Я. С. (J. S. Kurdwanowski) 6, 97
Ламберт, И. Г. (J. H. Lambert) 3, 4, 6, 8, 44, 63, 65—68, 80, 102, 103, 121, 123, 125, 127, 128, 130, 132, 135, 143, 144, 153, 154, 159, 163, 168—171, 173, 174, 178, 180, 181, 184, 185, 188, 191, 193—198, 202, 206, 214, 221, 222, 226, 238, 240
Лаплас, П.-С. (P.-S. Laplace) 80, 81, 95, 152, 198, 200
Либенталь, Э. (E. Liebenthal) 74, 75
Любитов, Ю. Н. 240
Мавролико, Ф. (F. Maurolico) 6, 107

- Майзель, С. О. 19, 187
Максвелл, Дж. К. (J. C. Maxwell) 95
Маргулис, В. (W. Margoulis) 227
Мари, Ф. (F. Marie) 6
Мемке, Р. (R. Mehmke) 75
Мешков, В. В. 31, 122
Мун, П. (P. Moon) 50, 66, 81, 152, 197, 215, 227
Новиков, В. В. 4
О'Брайен, П. Ф. (P. F. O'Brien) 222
Ондрачек, И. (J. Ondracek) 174
Пархоменко, П. Ю. 222
Планк, М. (M. Planck) 11, 23, 77
Пойнтинг, Дж. Г. (J. H. Poin-ting) 18, 21
Поляк, Г. Л. 208, 211
Пуассон, С.-Д. (S.-D. Poisson) 65, 80, 81, 85
Райд, Дж. (J. W. Ryde) 236
Ратнер, Е. С. 178
Руссо (Roussau) 92, 98, 99, 112, 115, 116, 143, 150, 164
Рышин, Н. А. 218
Сансон, Н. (N. Sanson) 120
Соболев, В. В. 214
Соломенцев, Е. Д. 4
Спенсер, Д. Э. (D. E. Spencer) 50, 66, 81, 85, 152, 197, 215
Степанов, Б. И. 68
Стокс, Дж. Г. (G. G. Stokes) 84, 232—234
Сэмпнер, В. (W. E. Sumpner) 187
Тверитинов, Е. П. 89
Тиходеев, П. М. 4, 49, 116
Труханов, А. А. 100
Уэлш, Дж. В. Т. (J. W. T. Walsh) 188
Филипс, Р. О. (R. O. Philips) 220
Фок, В. А. 175
Фредгольм, Э. Н. (E. I. Fredholm) 214
Фурье, Ж.-Б. (J.-B. Fourier) 65, 67, 104, 122
Хигби, Г. Г. (H. H. Higbie) 178
Хизано, К. (K. Hisano) 227
Хоттель, Х. К. (H. C. Hottel) 184
Чебышев, П. Л. 89
Чиколев, В. Н. 97, 109
Штраубель, Р. (R. Straubel) 17, 49
Штульман, А. (A. Stuhlmann) 105
Эйлер, Л. (L. Euler) 6, 63, 66, 67, 80, 102, 103, 142, 148, 159, 165, 167, 238
Ямаути, З. (Z. Yamauti) 4, 173, 180, 181
-

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адетивность 31
- Вектор** Пойнтинга 18
— радиации 19, 21, 25
— световой 54, 69, 71, 124, 125
— —, вихрь 79, 80
— —, поток 69
— —, расхождение 78
— —, тангенциальная составляющая 132, 153
— телесного угла 12, 79
— — —, поток 15, 16
- Величины лучистые** 51
— редуцированные 53
— световые 42
— — отрицательные 68
- Вероятность облучения** 12, 176, 211
- Видность** относительная 39
- Глаз** 39
- Глобоскоп** 371
- Давление света** 21
- Диафрагмы** 14, 190
- Дозиметрия** 327
- Закон излучения** 58
— квадратов расстояний 44
— Ламберта 65—68, 80, 102, 103, 123, 127, 135, 138, 143, 144, 154, 159, 163, 168—171, 174, 178, 184, 185, 191, 193—198, 202, 206, 214, 221, 222, 226,
— наклона 44, 71, 85
— подобия излучающих поверхностей 129
— проекции телесного угла 171
— Эйлера 66, 67, 80, 102, 103, 135, 138, 142, 148, 154, 159, 163, 167, 238
- Избирательность** 27, 29
— при многократном отражении 229
- Излучательность** 52
- Излучающие диски** 8, 144, 167, 186, 187, 192, 197, 200, 204, 238
— квадраты 167, 184
— купола 168
— ленты 147, 148—150, 159, 194
— линии 145, 149, 151, 194
— —, системы 195, 226
— многоугольники 173, 177
— окружности 152
— плоские фигуры 148, 164, 165, 169, 174, 179, 193
— плоскости 128, 130, 134, 135
— поверхности 9, 60, 123, 128, 132, 137, 174
— — равнояркие 67, 168, 191, 194
— полосы 143, 155, 165, 196, 197, 200
— прямоугольники 130, 135, 139, 142, 144, 165, 176
— трубки 147, 148, 151, 154, 155, 167, 195, 197, 205
— цилиндры 140, 188, 201, 207, 210
— — круговые 145, 153—155, 193
— — эллиптические 196
— шары 153, 185
— эллипсоиды 196
— эллипсы 8, 196
- Изолуксы** 88, 122, 149
— вертикальной освещенности 100
— горизонтальной освещенности 100
— относительные 122
— пространственные 100
- Изосвечи** 119
- Инвариант Гершуна** 17.
— Стокса 232, 234
- Индекс помещения** 227
— формы 141, 142
- Индикатриса** 58, 96
- Информационный аспект** 4
- Источники** 7, 56
— вторичные 60
— первичные 60
— точечные 9, 12, 13, 56, 60, 95
— — косинусные 65, 102, 107, 108, 111, 187
— — несимметричные 56, 59, 118, 122
— — равномерные 67, 82, 94, 102, 106, 107, 116, 205, 237
— —, ряд 163
— — симметричные 56
— —, система 163, 226
— —, характеристики 96
- Конформное отображение** 84, 202
- Коэффициент изменения** 28
— использования 225, 228
— — первичный 225
— освещенности 61, 62
— отражения 27
— — кажущийся 221
— — многократного 219
— — полный 27
— — световой 56
— — спектральный 26, 38
— поглощения, пропускания 27
— — полный 27
— — световой 56
— — спектральный 26, 28
— самосвязи 62
— связи 62, 63
- Кривая относительной освещенности** 97
— потока 98
— — относительного 98
— Рвссо 92
— силы света 57
— — — продольная 57

Лампы газосветные 66, 154
— люминесцентные 148, 240
— ртутные 80, 194
Лучи 14, 15
—, трубки 10
Лучистость 52
Люкс 50
Люмен 50

Мера множества лучей пучка 12
— — — трубки 16
Множественное отражение 212
Мощность экспозиционной дозы 237

Нит 50

Облученность 52
Освещение естественное 176, 178, 193
— прожекторное 103, 122
— электрическое 109
Освещенность 42, 85
— вертикальная 87
— горизонтальная 87
—, интегральное уравнение 213
— нормальная 44
— относительная 97
— пространственная 51
— средняя 42
—, тело 73
—, треугольник 87

Поток бактерицидный 41
— зооальбий 90
— корпускулярный 240
— лучистый 18—20
— полезный 31
— редуцированный 35, 37
— световой 41
—, двугранно-угловая плотность 149
—, объемная плотность 78
—, погонная плотность 145
— эритемный 41
— эффективный 33, 34

Правило взаимозаменяемости 170
— перпендикуляров 86

Приемник 28
—, инерционность 29
—, реакция 28
—, полезная 28
—, чувствительность интегральная абсолютная 31
— — —, относительная 31
— — —, спектральная 30, 37, 38

Принцип обратимости 125, 127, 130
— сохранения редуцированного потока 42, 64, 223

Проекция изоцилиндрическая 121
— синусоидальная 120

Пучок лучей астигматический 45, 46
— — гомоцентрический 10, 11
— — параллельный 13
— — расходящийся 10, 13
— — сходящийся 11, 13
— — физический 9, 12—14

Равноосвещенные поверхности 100, 105

Радиация 7, 18, 19
— квазизодородная 22
—, к. п. д. 35, 39
— однородная 21
—, отдача 35

Расход фотонов 23, 25
— — редуцированный 37

Светильники 95, 240
Светность 42
—, интегральное уравнение 215
Световое поле 72, 75, 123
— — безвихревое 80
— —, вектор-потенциал 84, 85
— —, двухмерное 83, 84, 152
— —, квазипотенциалы 81, 82
— — постоянное 72, 77, 78
— —, потенциал 80, 82
— —, теория 75
— —, точечного источника 93

Световые линии 78, 136, 152
— модели 231
— трубки 78, 136

Светомерный шар 214
Свеча 50
Сила излучения 52
— света 43
— —, градиент 79
— — средняя сферическая 60, 92
— — удельная 49

Слой плоскопараллельный 234
Спектр равнофотонный 25
— равноэнергетический 24
Спектральная интенсивность 24
— координата 23
— плотность 22, 51, 53
— — лучистого потока 22
— — расхода фотонов 23
— шкала 23
— — логарифмическая 24

Способ Руссо 92
Стильб 50
Суперпозиция 19, 25
Тело абсолютно черное 64, 65
— серое 27

Теорема Штраубеля 17
Термодинамический метод 68

Угол излучения 49, 56
Уравнение Муна и Спенсер 81
Условие замкнутости 64

Формула Блонделя 103
— Винера 173, 176
— Райда и Купера 236
— Тиходеева 116
— Ямаути 173

Формулы Дурньона 224
— Хигби 178

Фотометрическая ось 56
Фотометрическая площадка, 100
Фотометрическое тело 57
Фотометрия 5
— теоретическая 5, 231

Функция Ламберта 180
— Ламберта — Ямаути 181

Эквивалентный телесный угол 59, 90, 104

Эквипольные поверхности 100
Энергетический выход 32
Энергия лучистая 7
— —, объемная плотность 77

Яркость 46, 49
—, градиент 83
—, тело 73

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение. Возникновение и содержание теоретической фотометрии	5
Глава первая. Исходные положения	9
§ 1. Геометрия лучей	—
§ 2. Лучистый поток и вектор радиации	18
§ 3. Спектральные характеристики радиации	21
§ 4. Преобразование радиации телами	25
§ 5. Спектральная чувствительность и редуцированный поток	28
§ 6. Световые величины и основные соотношения между ними	42
§ 7. Лучистые величины	51
§ 8. Связь лучистых, световых и других редуцированных величин	53
Глава вторая. Главные методы	56
§ 9. Основные характеристики источников света	—
§ 10. Коэффициенты освещенности и связи	61
§ 11. Термодинамические условия. Законы Ламберта и Эйлера	63
§ 12. Отрицательные световые величины	68
§ 13. Световой вектор	69
§ 14. Теория светового поля	75
Глава третья. Точечные источники	85
§ 15. Расчет освещенности	—
§ 16. Световой поток точечного источника	88
§ 17. Световое поле точечного источника	93
§ 18. Характеристики симметричных точечных источников	95
§ 19. Поверхности, равноосвещенные симметричными точечными источниками	105
§ 20. Наиболее удобное расположение точечных источников	109
§ 21. Некоторые случаи расчета светового потока	111
§ 22. Несимметричные источники	118
Глава четвертая. Излучающие поверхности и линии	123
§ 23. Общие соображения	—
§ 24. Принцип обратимости	125
§ 25. Световое поле излучающей поверхности	130
§ 26. Коэффициенты связи в призмах и цилиндрах	138

§ 27. Излучающие линии	145
§ 28. Двухмерные поля	152
§ 29. Системы источников	163
§ 30. Излучение по закону Эйлера	165
Глава пятая. Источники конечных размеров, излучающие по закону Ламберта	168
§ 31. Световое поле равнорядных излучателей	—
§ 32. Прямоугольные излучатели	176
§ 33. Шар, излучающий внутренней поверхностью, и излучающие диски	185
§ 34. Цилиндры, излучающие внутренней поверхностью	188
§ 35. Замена излучающей поверхности точечным источником	191
§ 36. Излучающие линии	194
§ 37. Двухмерные задачи	196
Глава шестая. Многократное отражение	212
§ 38. Интегральные уравнения освещенности и светности	—
§ 39. Расчет световых потоков	216
§ 40. Отражение в вогнутой поверхности	218
§ 41. Система отражающих поверхностей	223
§ 42. Распределение света в полых прямоугольных параллелепипедах	224
§ 43. Избирательное отражение	229
Глава седьмая. Некоторые задачи, решаемые фотометрическими методами	231
§ 44. О применении фотометрических соотношений	—
§ 45. Инвариант Стокса	232
§ 46. Отражение и пропускание света плоскопараллельным слоем	234
§ 47. Дозиметрия гамма-излучения	237
§ 48. Коэффициент связи ряда труб и стенки	238
§ 49. Перенос частиц	240
Литература	241
Указатель имен	263
Предметный указатель	265